

К 100-летию со дня рождения академика Л. Д. Ландау

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина

А. М. Ермолаев, Г. И. Рашба

**ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ
ЭЛЕКТРОНЫ**

Учебно-методическое пособие

Харьков – 2015

УДК 530.145, 530.1 (075.8)

ББК 22.317я73

Е74

Рецензенты:

член-корр. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, зав. отделом Теоретической физики ИРЭ имени А.Я. Усикова НАН Украины, профессор **В.А. Ямпольский**;
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ФТИНТ имени Б.И. Веркина НАН Украины **М.М. Богдан**.

Рекомендовано к печати решением

Ученого совета физического факультета

*Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина
(протокол № 1 от 23 января 2015 г.)*

Ермолаев А. М., Рашба Г.И.

Е 74 Взаимодействующие электроны: учебно-методическое пособие для студентов физических специальностей университетов. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2015. – 90 с.

В пособии рассматриваются свойства системы взаимодействующих друг с другом электронов в проводнике на фоне компенсирующего заряда ионов. Показано, как равновесные характеристики этой системы рассчитываются методом квантовых функций Грина. Основное внимание уделено выборочному суммированию лестничных и кольцевых диаграмм Фейнмана для функций Грина в теории электронного газа низкой и высокой плотности.

Пособие адресовано студентам физических, физико-технических и радиофизических факультетов университетов и всем, кто интересуется проблемой многих тел в квантовой теории.

УДК 530.145, 530.1 (075.8)

ББК 22.317я73

© Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 2015

© Ермолаев А.М., Рашба Г.И., 2015

Содержание

Введение.....	4
1. Функции Грина.....	8
2. Связь термодинамических величин с функциями Грина.....	20
3. Теория возмущений.....	31
3.1. Первый порядок теории возмущений.....	31
3.2. Обменная энергия.....	34
3.3. Второй порядок теории возмущений.....	36
4. Приближение Хартри-Фока.....	41
5. Вырожденный ферми-газ низкой плотности.....	46
6. Электронный газ высокой плотности.....	64
6.1. Суммирование кольцевых диаграмм.....	64
6.2. Вырожденный электронный газ.....	71
6.3. Невырожденный электронный газ.....	79
Литература.....	87

Введение

*Главное в физике –
это умение пренебрегать.
Л. Д. Ландау*

Законы взаимодействия частиц постоянно находятся в центре внимания физиков. Выяснение природы взаимодействия, объединение известных взаимодействий в рамках одной теории, поиски новых видов взаимодействия – основная проблема и физики элементарных частиц, и физики макроскопических систем. В физике макросистем эта задача получила название проблема многих тел. Сколько же должно быть тел в системе, чтобы возникла проблема? На этот вопрос мы находим ответ в книге Маттука [1], посвященной методу функций Грина в теории многих тел: «Для ньютоновской механики XVIII века задача трех тел была неразрешимой. С рождением общей теории относительности (где-то около 1910 г.) и квантовой электродинамики (1930 г.) стали неразрешимыми задачи двух и одного тела. В современной квантовой теории поля неразрешимой оказывается задача нуля тел (вакуум). Так что если мы интересуемся точными решениями, то ни одного тела – это уже слишком много». К сожалению, точно решаемых задач в современной физике немного. При изучении макросистем приходится использовать различные аппроксимации. Некоторые из них рассмотрены в этом пособии.

Объектом изучения в предлагаемом пособии является система взаимодействующих электронов, движущихся на фоне положительного заряда ионов, компенсирующих заряд электронов. Эта система – простейшая модель металла. Она называется моделью желе. В этой модели возбуждения ионов

не учитываются. Заметный прогресс при изучении такой системы обусловлен использованием методов квантовой теории поля – функций Грина и диаграмм Фейнмана, функциональных методов. Этими методами удалось обосновать концепцию квазичастиц в металлах и других системах, которая возникла давно.

Каждый электрон проводимости в металле отталкивает другие электроны и оказывается окруженным облаком, «шубой» положительного заряда ионов. Это образование – реальная частица плюс облако других частиц называется квазичастицей. Если квазичастиц мало, их «шубы» не перекрываются, квазичастицы устойчивы и не теряют своей индивидуальности. Влияние облака на частицу приводит к тому, что масса квазичастицы отличается от массы «голой» частицы. Появляется понятие эффективной массы. Квазичастица обладает новым законом дисперсии – зависимостью ее энергии ε от импульса p . С ростом плотности газа электронов «шубы» начинают перекрываться, квазичастицы сталкиваются друг с другом. Это означает, что квазичастица существует ограниченное время τ_p . Это среднее время ее жизни в состоянии с импульсом p , пока столкновения с другими квазичастицами не выбросят ее из этого состояния. Энергия квазичастицы становится комплексной: $\varepsilon'(p) = \varepsilon(p) - i\gamma(p)$, где $\varepsilon(p)$ – спектр квазичастицы, $\gamma = \hbar/\tau$ – декремент затухания. Чтобы концепция квазичастиц была пригодной, должно выполняться неравенство $\gamma \ll \varepsilon$. Понятие квазичастицы применимо, если их число мало по сравнению с числом частиц в системе, т. е. возбуждение системы слабое.

Основное внимание в этом пособии уделяется квазичастицам в электронном газе малой и большой плотности. Из величин, характеризующих систему частиц с конечным

радиусом взаимодействия, можно составить отношение средней энергии взаимодействия пары частиц U_0 к их средней кинетической энергии – параметр взаимодействия $\alpha = \frac{mr_0^2 U_0}{\hbar^2}$ (m – масса частицы, r_0 – радиус межчастичного взаимодействия), отношение r_0 к среднему расстоянию между частицами $n^{-1/3}$ (n – плотность газа) – параметр сжатости $\eta = r_0 n^{1/3}$. В теории систем с дальнедействующим кулоновским взаимодействием вводится безразмерный параметр $\frac{e^2}{\hbar v_0}$, где e – заряд электрона, v_0 – характерная скорость электронов в газе. Электронный газ характеризуется также безразмерным параметром r_s , который равен отношению среднего расстояния между электронами к борновскому радиусу $\frac{\hbar^2}{me^2}$:

$$r_s = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{me^2}{\hbar^2} n^{-1/3}. \quad (0)$$

Если $r_s \ll 1$, мы имеем дело с электронным газом большой плотности. Если же $r_s \gg 1$, газ обладает малой плотностью. Эти предельные случаи рассматриваются в пособии. Интересная промежуточная область $r_s = 2-5$ до сих пор детально не изучена. По мнению Монтролла [1] «... здесь физик подобен мыши, откусывающей маленькие кусочки от края черствого куска сыра и не имеющей возможности добраться до свежей его сердцевины».

Методу квантовых функций Грина в теории взаимодействующих электронов посвящена обширная литература [1-15]. Цитированные в этом пособии монографии адресованы, в основном, специалистам. В предлагаемом

пособии авторы делают попытку изложить сложный материал доступным способом, повысить интерес учащихся к этой актуальной тематике. Предполагается, однако, что читатель знаком с квантовой механикой и статистической физикой, знаком с функциями Грина и диаграммами Фейнмана в минимальном объеме, содержащемся в наших пособиях [16,17]. В конце каждого раздела приведены задачи. Мы надеемся, что они будут способствовать более активному усвоению материала. Некоторые из них могут быть использованы как темы курсовых и дипломных работ студентов. Пособие адресовано студентам, нуждающимся в путеводителе по литературе, аспирантам, преподавателям и научным сотрудникам физических, физико-технических и радиофизических факультетов университетов, желающих пополнить свои знания в развивающейся области физики.

1. Функции Грина

В небольшом пособии, посвященном методу функций Грина в теории взаимодействующих электронов, подробно изложить этот метод невозможно. Поэтому в этом разделе мы коротко остановимся на тех понятиях теории, которым в пособиях [16,17] уделено слишком мало внимания. Детальное описание метода функций Грина в теории макроскопических систем содержится в цитированной выше литературе.

Ряд величин, характеризующих газ взаимодействующих электронов проводимости в макросистеме, можно вычислить при помощи функций Грина при нулевой температуре [1-15]. Одночастичная причинная функция Грина G в координатном представлении определяется формальным соотношением [2,3]:

$$i\hbar G_{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) = \langle \psi_0 | T_t [\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}^+(x_2)] | \psi_0 \rangle, \quad (1.1)$$

где $x = (\vec{r}, t)$ – координаты пространственно-временной точки, α – спиновая переменная электрона, $\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, t)$ и $\hat{\psi}_{\alpha}^+(\vec{r}, t)$ – гейзенберговские полевые операторы, $|\psi_0\rangle$ – кет-вектор основного состояния системы, T_t – оператор хронологического упорядочения. В однородной немагнитной системе функция (1.1) зависит от разности $x = x_1 - x_2$ и изображается диагональной матрицей 2×2 в спиновом пространстве: $G_{\alpha_1\alpha_2} = G \delta_{\alpha_1\alpha_2}$. Совершая фурье-преобразование полевых операторов, получаем

$$\hat{\psi} = \hat{u} + \hat{v}^+, \hat{\psi}^+ = \hat{u}^+ + \hat{v},$$

где

$$\begin{aligned}\hat{u}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p > p_0} \hat{a}_{\vec{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}\right), \\ \hat{u}^+(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p > p_0} \hat{a}_{\vec{p}}^+ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}\right), \\ \hat{v}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p < p_0} \hat{a}_{\vec{p}}^+ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}\right), \\ \hat{v}^+(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p < p_0} \hat{a}_{\vec{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}\right).\end{aligned}$$

Здесь $\hat{a}_{\vec{p}}$ и $\hat{a}_{\vec{p}}^+$ – операторы уничтожения и рождения электронов с импульсом \vec{p} , p_0 – импульс Ферми, V – объем системы, u и u^+ – операторы уничтожения и рождения частиц выше границы Ферми, v и v^+ – операторы уничтожения и рождения дырок ниже этой границы. Подставляя фурье-разложение полевых операторов в (1.1), получаем функцию Грина в импульсном представлении:

$$i\hbar G(\vec{p}_1, \vec{p}_2, t) = \langle \psi_0 | T_t \left[\hat{a}_{\vec{p}_1}(t) \hat{a}_{\vec{p}_2}^+(0) \right] | \psi_0 \rangle. \quad (1.2)$$

Используя формальные определения (1.1) и (1.2), можно получить все свойства функции Грина, связать ее с наблюдаемыми величинами, разработать методы расчета этой функции. Для этого необходимо иметь гамильтониан системы электронов. В случае парного взаимодействия частиц он равен

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\alpha} \int d^3r \hat{\psi}_{\alpha}^+(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \hat{\psi}_{\alpha_1}^+(\vec{r}_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}^+(\vec{r}_2) v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \hat{\psi}_{\alpha_2}(\vec{r}_2) \hat{\psi}_{\alpha_1}(\vec{r}_1) = \quad (1.3) \\ &= \sum_{\vec{p}\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\vec{p}\alpha}^+ \hat{a}_{\vec{p}\alpha} + \frac{1}{2V} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{q}} v(\vec{q}) \hat{a}_{(\vec{p}_1 + \hbar \vec{q})\alpha_1}^+ \hat{a}_{(\vec{p}_2 - \hbar \vec{q})\alpha_2}^+ \hat{a}_{\vec{p}_2 \alpha_2} \hat{a}_{\vec{p}_1 \alpha_1},\end{aligned}$$

где m – масса электрона, $v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ – энергия взаимодействия двух электронов в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_2 ,

$$v(\vec{q}) = \int d^3r v(r) \exp(-i\vec{q}\vec{r}) \quad (1.4)$$

– компонента Фурье энергии взаимодействия. Второе слагаемое в (1.3) описывает процессы рассеяния электронов с передачей импульса $\hbar\vec{q}$, показанные на рис. 1.1. Остановимся

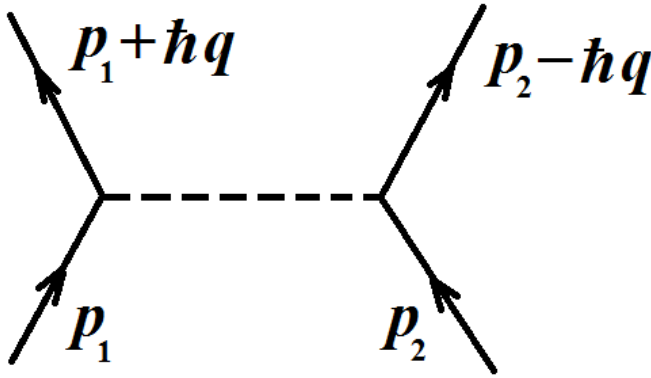


Рис. 1.1. Рассеяние пары электронов с передачей импульса $\hbar\vec{q}$

на физическом смысле функций (1.1) и (1.2).

Известно, что если $\psi_n(0)$ – волновая функция стационарного состояния n системы в момент $t=0$, то шредингеровская волновая функция $\psi(t)$ в момент t может быть представлена в виде суперпозиции [18]

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \psi_n(0),$$

где E_n – энергия системы в состоянии n ,

$$A_n(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \langle \psi_n(0) | \psi(t) \rangle,$$

$|A_n(t)|^2$ – вероятность обнаружить систему в момент t в состоянии $\psi_n(0)$. Величина A_n называется амплитудой вероятности. С другой стороны, волновая функция $\psi(t)$ имеет вид

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\psi(0),$$

где $\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)$ – оператор эволюции системы с гамильтонианом (1.3). Следовательно,

$$A_n(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}E_n t\right)\langle\psi_n(0)|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|\psi(0)\rangle. \quad (1.5)$$

Перейдем в формуле (1.2) от гейзенберговских операторов к операторам вторичного квантования в представлении Шредингера:

$$i\hbar G(\vec{p}_1, \vec{p}_2, t > 0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}E_0 t\right)\langle\hat{a}_{\vec{p}_1}^+\psi_0|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|\hat{a}_{\vec{p}_2}^+\psi_0\rangle. \quad (1.6)$$

Здесь E_0 – энергия основного состояния системы, учтено $\hat{H}|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$ и определение сопряженного оператора. В формуле (1.6) $|\hat{a}_{\vec{p}_2}^+\psi_0\rangle$ – вектор состояния $(N+1)$ -электронной системы, который получается добавлением к основному состоянию N -электронной системы $|\psi_0\rangle$ в момент $t=0$ электрона с импульсом \vec{p}_2 . Аналогично $|\hat{a}_{\vec{p}_1}^+\psi_0\rangle$ – состояние, которое получается из основного состояния добавлением к нему электрона с импульсом \vec{p}_1 . Сравнивая формулы (1.5) и (1.6), убеждаемся, что с точностью до множителя функцию G можно считать амплитудой вероятности того, что $(N+1)$ -фермионная система, находившаяся при $t=0$ в состоянии

$|\hat{a}_{\vec{p}_2}^+ \psi_0\rangle$, окажется в момент t в состоянии $|\hat{a}_{\vec{p}_1}^+ \psi_0\rangle$. Следует, однако, иметь в виду, что состояние системы $|\hat{a}_{\vec{p}_1}^+ \psi_0\rangle$ не является стационарным [12]. Кроме того, в нормальной системе взаимодействующих электронов функция распределения по импульсам при нулевой температуре размыта. Ее скачок при переходе через точку $p = p_0$ меньше единицы [3]. Это означает, что рождение и уничтожение электронов возможно как выше, так и ниже границы Ферми.

Таким же способом можно показать, что электрон, добавленный к системе в момент $t = 0$ в точке \vec{r}_2 , распространится за время t в точку \vec{r}_1 . По этой причине функции Грина называются функциями распространения – пропагаторами.

Используя определение оператора хронологического произведения, перепишем (1.1) в виде

$$i\hbar G(x_1, x_2) = \begin{cases} \langle \psi_0 | \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}^+(x_2) | \psi_0 \rangle, & t_1 > t_2, \\ -\langle \psi_0 | \hat{\psi}^+(x_2) \hat{\psi}(x_1) | \psi_0 \rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (1.7)$$

При $t_1 > t_2$ оператор $\hat{\psi}^+(x_2)$, действуя на основное состояние ψ_0 , добавляет частицу в точке \vec{r}_2 в ранний момент t_2 . В момент $t_1 > t_2$ эта частица уничтожается в точке \vec{r}_1 , а система возвращается в исходное состояние ψ_0 . Во второй строке в формуле (1.7) в момент t_1 уничтожается частица, т. е. рождается дырка в точке \vec{r}_1 , которая в момент $t_2 > t_1$ уничтожается в точке \vec{r}_2 . Функция (1.7) описывает распространение частицы из точки x_2 в точку x_1 и дырки из x_1 в x_2 . Если бы взаимодействия между частицами не было,

эти процессы можно было бы изобразить тонкими направленными вдоль оси времени линиями (рис. 1.2).

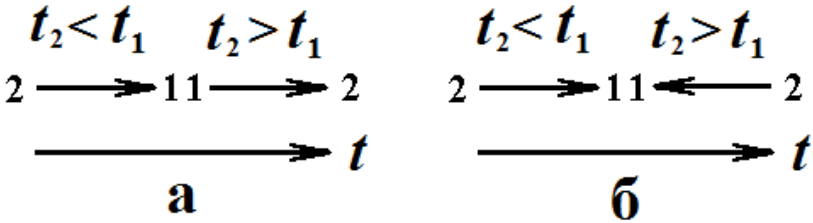


Рис. 1.2. Графическое изображение распространения свободной частицы и дырки между точками $1 = x_1$ и $2 = x_2$

Распространение на рис. 1.2 (а) носит причинный характер. Рождение предшествует уничтожению. Удобнее считать, что дырка распространяется вспять во времени, от точки своего уничтожения x_2 к точке рождения x_1 (рис. 1.2 (б)) [5]. При таком подходе линии частиц и дырок направлены от x_2 к x_1 как при $t_2 < t_1$, так и при $t_2 > t_1$.

Основной метод расчета функций Грина – теория возмущений – разложение этих функций в ряды по энергии межчастичного взаимодействия. Каждому члену ряда сопоставляется диаграмма Фейнмана [19]. Эти диаграммы в проблеме многих тел называются диаграммами Фейнмана-Голдстоуна [20]. На рис. 1.3 показано несколько диаграмм низшего порядка для функции Грина $G(\vec{p}, t)$ электронного газа в проводнике. Функции G_0 свободных частиц и дырок сопоставляется тонкая направленная линия, компоненте Фурье энергии взаимодействия двух электронов (1.4) сопоставляется

пунктирная линия, плотности электронов – петля с одной вершиной [2,3,16,17]. На рис. 1.3 ось времени направлена

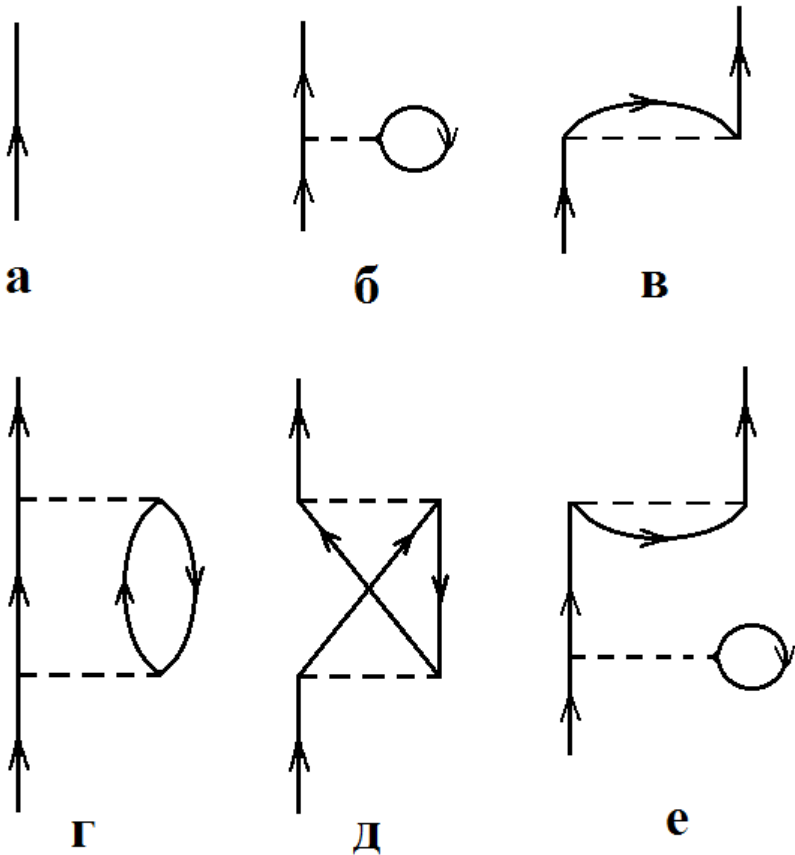


Рис. 1.3. Диаграммы для G в случае межчастичного взаимодействия

вверх, вдоль линий частиц. Линии дырок ориентированы против оси времени. Поскольку запаздывание в процессе

взаимодействия электронов не учитывается, пунктирные линии на всех диаграммах перпендикулярны оси времени.

Диаграммы второго порядка на рис. 1.3 можно изобразить иначе (рис. 1.4). Каждая диаграмма соответствует

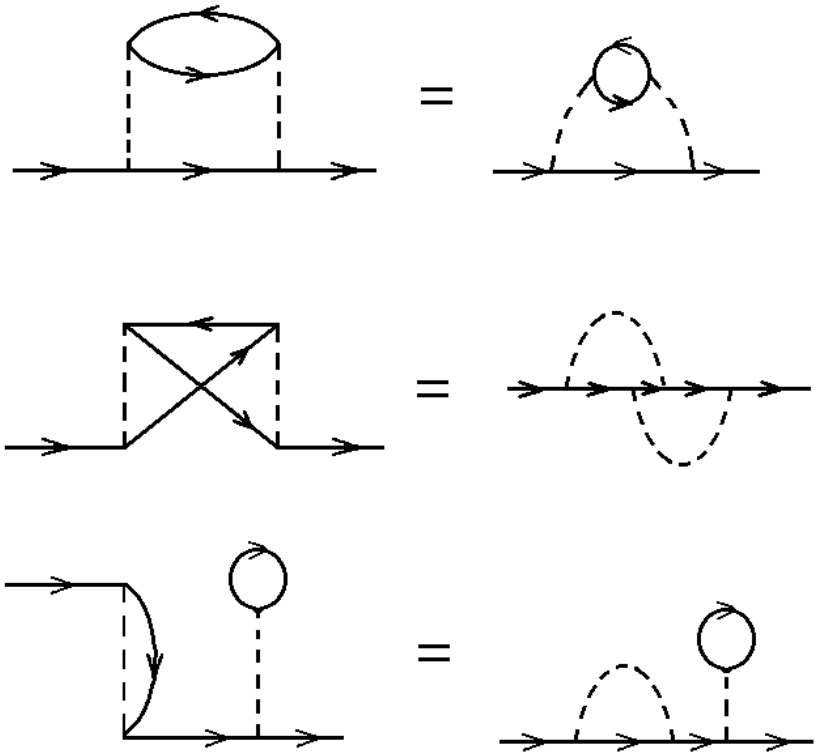


Рис. 1.4. Два способа изображения диаграмм Фейнмана

определенному физическому процессу. Диаграмма на рис. 1.3 (б) означает, что частица снизу налетает на систему электронов. Они образуют ферми-фон. В момент t она возбуждает систему, рождая пару «частица-дырка». Частице соответствует часть кольца со стрелкой, ориентированной

вверх, а дырке – часть кольца со стрелкой, направленной вниз. Пара в тот же момент t аннигилирует. Исходная частица уходит на бесконечность. Эта диаграмма первого порядка описывает прямое рассеяние электрона. На диаграмме 1.3 (в) частица, идущая вдоль оси времени, в момент t рождает пару. Ей соответствует правая вершина (рождению дырки соответствует конец дырочной линии, идущей вниз). Выбитая частица фона уходит на бесконечность. В тот же момент t исходная частица занимает место дырки (левая вершина). В левом узле рождается частица, т. е. уничтожается дырка. Эта диаграмма описывает обменное рассеяние на частицах фона [5,6].

На рис. 1.5 изображена диаграмма второго порядка для

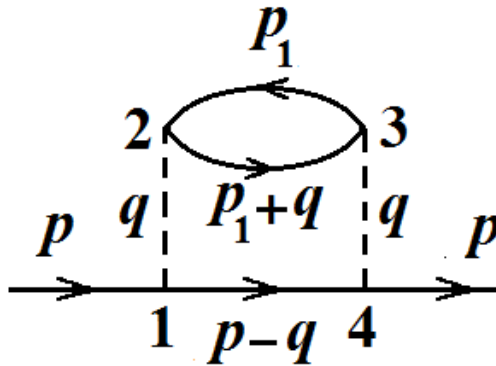


Рис. 1.5. Диаграмма второго порядка для функции $G(p)$

функции Грина $G(\vec{p}, \varepsilon)$ в импульсном представлении. Ось времени направлена слева направо. Четырехимпульсы $p = (\vec{p}, \varepsilon)$ расставлены так, чтобы в каждой вершине выполнялся закон сохранения 4-импульса. Эта диаграмма означает, что частица с импульсом \vec{p} , идущая слева вдоль оси

времени, в момент t_1 взаимодействует с ферми-фоном и рождает дырку с импульсом \vec{p}_1 и частицу с импульсом $\vec{p}_1 + \hbar\vec{q}$. В момент t_4 пара аннигилирует под влиянием частицы с импульсом $\vec{p} - \hbar\vec{q}$. Исходная частица после момента времени t_4 уходит на бесконечность.

Выполнение закона сохранения 4-импульса в каждой вершине еще не означает, что энергия сталкивающихся частиц сохраняется. На рис. 1.5 энергия сталкивающихся частиц (левая пунктирная линия) равна $\frac{p^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2m}$. После взаимодействия этих частиц с передачей импульса $\hbar\vec{q}$ их энергия становится равной

$$\frac{(\vec{p} - \hbar\vec{q})^2}{2m} + \frac{(\vec{p}_1 + \hbar\vec{q})^2}{2m}.$$

Она отличается от энергии частиц до столкновения. Процессы такого типа называются виртуальными. Несохранение энергии в виртуальных процессах связано с соотношением неопределенностей для энергии и времени: $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Длительность акта взаимодействия Δt так мала, что фиксировать энергию с точностью до величин, меньших большой неопределенности $\Delta E \sim \hbar / \Delta t$, нет смысла. Несохранение энергии в виртуальных процессах удобно описывать иначе. Считается, что в этих процессах участвуют виртуальные частицы. Энергия сохраняется, но у виртуальных частиц иное, чем у реальных, соотношение между энергией и импульсом. Виртуальная частица может иметь произвольную массу. На диаграммах Фейнмана виртуальным частицам соответствуют внутренние линии.

Диаграмма 2-го порядка на рис. 1.6 содержит две

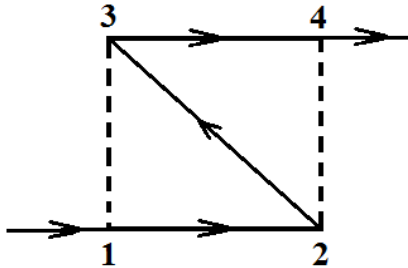


Рис. 1.6. Обменная диаграмма второго порядка

внутренние линии частиц и одну дырочную. Они соответствуют виртуальным электронам. На рис. 1.6 налетающая слева частица в момент t_1 рождает пару (точка 3). Обе частицы в паре виртуальные. Исходная частица между t_1 и t_2 стала виртуальной. Частица пары в точке 4 (момент t_2) уходит на бесконечность. В момент t_2 виртуальная частица аннигилирует с виртуальной дыркой (правая линия взаимодействия). Эта диаграмма обменная, так как исходная частица оказалась в дырке, а выбитая в момент t_1 частица фона ушла на бесконечность.

Переходя к расчету характеристик взаимодействующих электронов методом функций Грина, мы надеемся, что читатель знаком с такими понятиями диаграммной техники как собственно-энергетическая функция, поляризационный оператор, двухчастичная функция Грина, вершинная функция. Сначала выясним, как термодинамические величины, характеризующие газ, связаны с функциями Грина [2,3,11,15-17].

Задачи

- 1.1. Найдите скачок функции (1.1) при $t_1 = t_2$.
- 1.2. Получите функцию $\nu(q)$ (1.4) в случае кулоновского взаимодействия электронов в трехмерном и двумерном случаях.
- 1.3. Какой вид имеет функция $\nu(q)$ (1.4) в случае кулоновского взаимодействия электронов на поверхности цилиндра?
- 1.4. Получите спектральное представление функции (1.1) (см. [2,3]).
- 1.5. Как полюсы фурье-образа $G(\vec{p}, \varepsilon)$ функции (1.1) связаны со спектром квазичастиц (см. [2,3])?
- 1.6. Каким уравнениям движения подчиняется функция (1.1)?
- 1.7. Найдите двухчастичную функцию Грина
$$(i\hbar)^2 K(3, 4; 1, 2) = -\langle \psi_0 | T_t (\hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+) | \psi_0 \rangle$$
 идеального ферми-газа. Здесь $1 = (\vec{r}_1, \alpha_1, t_1), \dots$
- 1.8. Получите спектральное представление двухчастичной функции Грина.
- 1.9. Свяжите двухчастичную функцию Грина электронов с вершинной функцией Γ (см. [2,3]).
- 1.10. Найдите вклад диаграмм на рис. 1.3 г, д в собственно-энергетическую функцию при нулевой температуре.

2. Связь термодинамических величин с функциями Грина

Среднее число электронов в открытой равновесной системе равно [2,3,11,21]

$$N(V, T, \mu) = \sum_{\alpha} \int d^3r \langle \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{r}) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}) \rangle, \quad (2.1)$$

где V, T, μ – объем, температура и химический потенциал системы. Угловыми скобками обозначено усреднение по большому каноническому ансамблю Гиббса. Зная функцию (2.1), можно получить большой термодинамический потенциал системы $\Omega(V, T, \mu)$, интегрируя соотношение

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{V, T}$$

по химическому потенциалу. Остальные термодинамические функции могут быть вычислены методами статистической физики [21].

Выразим функцию (2.1) через одноэлектронную температурную функцию Грина, определенную соотношением [2,3]

$$G_{\alpha\alpha'}(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau') = - \langle T_{\tau} \left[\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, \tau) \hat{\psi}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{r}', \tau') \right] \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь τ – «мацубаровское время» ($0 \leq \tau \leq \beta$, β – обратная температура), $\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, \tau)$ и $\hat{\psi}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{r}', \tau')$ – полевые операторы электронов в представлении Мацубары, T_{τ} – оператор хронологического упорядочения по переменной τ . Функцию (2.2), как и функцию (1.1), полезно рассматривать как амплитуду вероятности перехода электрона из точки $x' = (\vec{r}', \tau')$ в точку $x = (\vec{r}, \tau)$ [8]. Число электронов (2.1) связано с функцией (2.2) очевидным соотношением

$$N = \sum_{\alpha} \int d^3 r G_{\alpha\alpha}(\vec{r}, \tau; \vec{r}, \tau^+), \quad (2.3)$$

где $\tau^+ = \lim_{\delta \rightarrow +0} (\tau + \delta)$. Подставляя сюда фурье-разложение функции (2.2) [2, 3, 16, 17]

$$G(\vec{r}, \tau) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(\vec{p}, \zeta_s) \exp\left[i\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} - \zeta_s \tau\right)\right],$$

$$G(\vec{p}, \zeta_s) = \int d^3 r \int_0^{\beta} d\tau G(\vec{r}, \tau) \exp\left[-i\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} - \zeta_s \tau\right)\right],$$

получаем

$$N = 2V \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{p}),$$

где

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(\vec{p}, \zeta_s) e^{i\zeta_s 0^+}, \quad (2.4)$$

– функция распределения электронов по импульсам,
 $\zeta_s = \frac{\pi(2s+1)}{\beta}$ – нечетные «мацубаровские частоты»,

$$0^+ = \lim_{\delta \rightarrow +0} \delta.$$

Соотношение, аналогичное (2.3), можно получить для любого аддитивного оператора [18]

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_a \hat{f}_a^{(1)}, \quad (2.5)$$

где \sum_a – суммирование по частицам системы.

Вторичноквантованный оператор (2.5) имеет вид [18]

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_{\alpha\alpha'} \int d^3 r \hat{\psi}_{\alpha'}^+(\vec{r}) f_{\alpha'\alpha}^{(1)} \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}).$$

Гиббсовское среднее значение этого оператора равно

$$\langle \hat{F}^{(1)} \rangle = Sp(\hat{\rho} \hat{F}^{(1)}) = \sum_{\alpha\alpha'} \int d^3r \lim_{\substack{\vec{r}' \rightarrow \vec{r} \\ \tau' \rightarrow \tau^+}} \hat{f}_{\alpha'\alpha}^{(1)} G_{\alpha\alpha'}(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau'). \quad (2.6)$$

Здесь $\hat{\rho}$ – статистический оператор большого канонического ансамбля Гиббса. Оператор $\hat{f}^{(1)}$ под знаком интеграла действует на переменную \vec{r} . Формула (2.6) позволяет связать кинетическую энергию электронов $\langle \hat{H}_0 \rangle$ с функцией Грина (2.2) соотношением

$$\langle \hat{H}_0 \rangle = \sum_{\alpha} \int d^3r \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) G_{\alpha\alpha}(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau^+). \quad (2.7)$$

Основное внимание в этом пособии уделяется расчету средней энергии межэлектронного взаимодействия

$$\langle \hat{V} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'} \int d^3r \int d^3r' v(\vec{r} - \vec{r}') \langle \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{r}) \hat{\psi}_{\alpha'}^{+}(\vec{r}') \hat{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}') \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}) \rangle. \quad (2.8)$$

Это среднее можно выразить через двухэлектронную температурную функцию Грина [2,3]

$$K(3, 4; 1, 2) = -\langle T_t(\hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2) \rangle, \quad (2.9)$$

где $1 = (\alpha_1, \vec{r}_1, \tau_1), \dots$. Можно связать среднее (2.8) и с одноэлектронной функцией Грина (2.2) [2,11]. Воспользуемся для этого уравнением движения для полевого оператора [2,3,11]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, \tau) &= [\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, \tau), \hat{H}'] = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \mu \right) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, \tau) + \\ &+ \sum_{\alpha'} \int d^3r' v(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\psi}_{\alpha'}^{+}(\vec{r}', \tau) \hat{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}', \tau) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, \tau), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{N}$. Последнее слагаемое в правой части этого равенства умножим слева на $\hat{\psi}^{+}(\vec{r}, \tau)$, проинтегрируем по \vec{r} и просуммируем по α , усредним со статоператором $\hat{\rho}$ и

разделим на двойку. Получим среднее (2.8). Выполняя те же операции и с остальными слагаемыми в (2.10), получаем

$$\langle \hat{V} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int d^3 r \lim_{\substack{\vec{r}' \rightarrow \vec{r} \\ \tau' \rightarrow \tau^+}} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) G_{\alpha\alpha}(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau'). \quad (2.11)$$

Складывая формулы (2.7) и (2.11), находим среднее значение гамильтониана \hat{H}' :

$$\begin{aligned} E' &= \langle \hat{H}' \rangle = \langle \hat{H}_0 - \mu \hat{N} + \hat{V} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int d^3 r \lim_{\substack{\vec{r}' \rightarrow \vec{r} \\ \tau' \rightarrow \tau^+}} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \mu \right) G_{\alpha\alpha}(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau'). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия E системы электронов связана с функцией Грина (2.2) соотношением

$$\begin{aligned} E &= \langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}_0 + \hat{V} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int d^3 r \lim_{\substack{\vec{r}' \rightarrow \vec{r} \\ \tau' \rightarrow \tau^+}} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) G_{\alpha\alpha}(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau'). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь энергия E выражена через переменные V, T, μ .

Чтобы связать термодинамический потенциал Ω с функцией Грина (2.2), изменим энергию взаимодействия электронов в λ раз, перейдем от ν к $\lambda\nu$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда $\hat{H}_{\lambda} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$, $\hat{H}'_{\lambda} = \hat{H}'_0 + \lambda\hat{V}$, $\hat{H}'_0 = \hat{H}_0 - \mu\hat{N}$. Большая статистическая сумма системы с таким гамильтонианом равна

$$Z_{\lambda} = e^{-\beta\Omega_{\lambda}} = \text{Spe}^{-\beta\hat{H}'_{\lambda}}.$$

Производная этой функции по параметру λ равна

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} Z_{\lambda} = -\beta e^{-\beta\Omega_{\lambda}} \frac{\partial \Omega_{\lambda}}{\partial \lambda}. \quad (2.14)$$

Представим Z_{λ} в виде ряда:

$$Z_\lambda = \text{Spe}^{-\beta(\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \text{Sp}(\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V})^n. \quad (2.15)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} Z_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{Sp}(\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V})^n.$$

Минимальное значение $n=1$ появилось потому, что при дифференцировании под знаком суммы появляется множитель n . Входящая в (2.15) производная равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V})^n &= \hat{V} (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) \dots (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) + \\ &+ (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) \hat{V} (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) \dots (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) + \dots + \\ &+ (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}) \dots \hat{V} (\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Число операторов $\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V}$ в каждом слагаемом в этой формуле равно $n-1$. Поскольку след произведения операторов не меняется при циклической перестановке сомножителей, все n слагаемых в формуле (2.16) дают одинаковый вклад в производную (2.15). Сдвигая индекс суммирования, запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_\lambda &= -\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \text{Sp} \left[(\hat{H}'_0 + \lambda \hat{V})^n \hat{V} \right] = \\ &= -\beta \text{Sp} \left(e^{-\beta \hat{H}'_\lambda \hat{V}} \right) = -\frac{\beta}{\lambda} e^{-\beta \Omega_\lambda} \langle \lambda \hat{V} \rangle_\lambda, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\langle \dots \rangle_\lambda = \text{Spe}^{\beta(\Omega_\lambda - \hat{H}'_\lambda)} \dots$$

– гиббсовское усреднение с гамильтонианом взаимодействия $\lambda \hat{V}$. Из формул (2.14) и (2.17) после интегрирования по λ получаем термодинамический потенциал:

$$\Omega(V, T, \mu) = \Omega_0(V, T, \mu) + \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda \hat{V} \rangle_\lambda. \quad (2.18)$$

Здесь Ω_0 – термодинамический потенциал идеального электронного газа. Подставляя сюда среднее (2.11), получаем связь потенциала Ω с одноэлектронной функцией Грина (2.2):

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \sum_\alpha \int d^3r \times \\ \times \lim_{\substack{\vec{r}' \rightarrow \vec{r} \\ \tau' \rightarrow \tau^+}} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) G_{\alpha\alpha}^\lambda(\vec{r}, \tau; \vec{r}', \tau'). \end{aligned} \quad (2.19)$$

В этой формуле G^λ – функция Грина, которая должна вычисляться с учетом взаимодействия электронов $\lambda \hat{V}$.

Переходя в формулах (2.13) и (2.19) к компонентам Фурье, находим

$$E = V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_s \left(i\zeta_s + \frac{p^2}{2m} + \mu \right) G(\vec{p}, \zeta_s) e^{i\zeta_s 0^+}, \quad (2.20)$$

$$\Omega = \Omega_0 + V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_s \left(i\zeta_s - \frac{p^2}{2m} + \mu \right) G^\lambda(\vec{p}, \zeta_s) e^{i\zeta_s 0^+}. \quad (2.21)$$

В этих формулах учтена диагональность матрицы $G_{\alpha\alpha'}$ по спиновым индексам.

Входящая в формулы (2.20) и (2.21) функция Грина связана с собственно-энергетической функцией $\Sigma(\vec{p}, \zeta_s)$ соотношением [2,3,11]

$$G(\vec{p}, \zeta_s) = \left[i\zeta_s - \varepsilon_p + \mu - \Sigma(\vec{p}, \zeta_s) \right]^{-1}, \quad (2.22)$$

где $\varepsilon_p = p^2/2m$. Это позволяет выразить термодинамические потенциалы E и Ω через Σ :

$$E = 2V \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_s e^{i\zeta_s 0^+} \left[\varepsilon_p + \frac{1}{2} \Sigma(\vec{p}, \zeta_s) \right] \times \quad (2.23)$$

$$\times \left[i\zeta_s - \varepsilon_p + \mu - \Sigma(\vec{p}, \zeta_s) \right]^{-1},$$

$$\Omega = \Omega_0 + V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_s e^{i\zeta_s 0^+} \Sigma^\lambda(\vec{p}, \zeta_s) \times \quad (2.24)$$

$$\times \left[i\zeta_s - \varepsilon_p + \mu - \Sigma^\lambda(\vec{p}, \zeta_s) \right]^{-1}.$$

В формулах (2.23) и (2.24) учтено

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\zeta_s \eta} = 0.$$

Таким образом, расчет термодинамических потенциалов системы электронов свелся к расчету Σ . Ниже мы получим эту функцию в приближении Хартри-Фока, а также для электронного газа малой и большой плотности.

Другие представления потенциала Ω читатель найдет в монографии [2] и сборнике задач [22]. В [22] показано, что в отсутствие поправок к вершине взаимодействия частиц существенные диаграммы для Ω изображены на рис. 2.1.

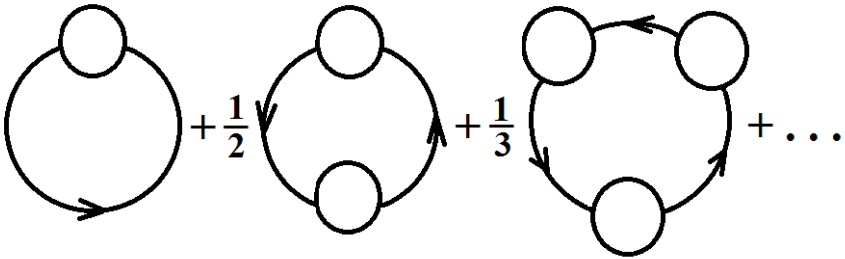


Рис. 2.1. Диаграммы для термодинамического потенциала Ω

Кружочки на этих диаграммах соответствуют функции Σ , а тонкие линии – функции G_0 . Сумма диаграмм на рис. 2.1 равна разности $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$, обусловленной взаимодействием частиц. Из рис. 2.1 видно, что n -й член ряда для $\Delta\Omega$ представляет собой замкнутую петлю из n функций

$$G^0(\vec{p}, i\zeta_s) = \frac{1}{i\zeta_s - \frac{p^2}{2m} + \mu}$$

и функций $\Sigma_\alpha(\vec{p}, i\zeta_s)$. Вклад этого члена в $\Delta\Omega$ равен

$$\Delta\Omega_n = \frac{n}{\beta} \sum_{\vec{p}s\alpha} \left[G_\alpha^0(\vec{p}, i\zeta_s) \Sigma_\alpha(\vec{p}, i\zeta_s) \right]^n.$$

Следуя [22], мы обозначаем здесь аргумент функций G_0 и Σ через $i\zeta_s$. Ряд на рис. 2.1 суммируется:

$$\Delta\Omega = -\frac{1}{\beta} \sum_{\vec{p}s\alpha} \ln \left[1 - G_\alpha^0(\vec{p}, i\zeta_s) \Sigma_\alpha(\vec{p}, i\zeta_s) \right].$$

Учитывая (2.22), получаем

$$\Delta\Omega = \frac{1}{\beta} \sum_{\vec{p}s\alpha} \ln \left[\frac{G_\alpha(\vec{p}, i\zeta_s)}{G_\alpha^0(\vec{p}, i\zeta_s)} \right].$$

Это означает, что

$$\Omega = \frac{1}{\beta} \sum_{\vec{p}s\alpha} e^{i\zeta_s 0^+} \ln G_\alpha(\vec{p}, i\zeta_s).$$

Входящую в эту формулу сумму по s представим в виде контурного интеграла:

$$\Omega = \sum_{\vec{p}\alpha} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \text{th} \frac{\beta z}{2} G_\alpha(\vec{p}, z) e^{z 0^+} \frac{dz}{4\pi i}. \quad (2.25)$$

Ветви C_1 и C_2 контура интегрирования показаны на рис. 2.2 (а).

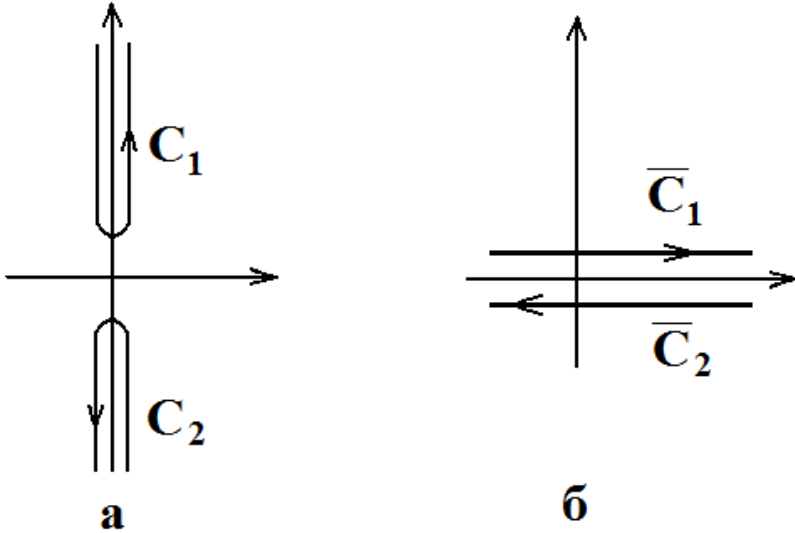


Рис. 2.2. Контур интегрирования в формуле (2.25)

Они охватывают полюсы функции $\text{th} \frac{\beta z}{2}$ в точках $z_s = i\zeta_s$ с вычетами $\frac{2}{\beta}$. Дифференцируя (2.25) по параметру T , получаем энтропию системы:

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{k_B}{2} \sum_{\vec{p}\alpha} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) e^{z0^+} \frac{\beta^2 z}{\text{ch}^2 \frac{\beta z}{2}} \ln G_\alpha(\vec{p}, z) \frac{dz}{4\pi i}, \quad (2.26)$$

где k_B – постоянная Больцмана. В формулах (2.25) и (2.26) $G_\alpha(\vec{p}, z)$ – аналитическое продолжение температурной функции Грина с точек $i\zeta_s$ на комплексную z -плоскость.

Продолжение на верхнюю полуплоскость дает запаздывающую функцию Грина G^+ , а на нижнюю – опережающую G^- [2]:

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z), \operatorname{Im} z > 0, \\ G^-(z), \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Быстрое убывание подынтегральной функции в интеграле (2.26) при удалении от мнимой оси позволяет развернуть контур $C = C_1 + C_2$, как показано на рис. 2.2 (б). Поэтому энтропию S можно представить в виде интегралов по вещественной оси от разности

$$\ln G^+(\vec{p}, \varepsilon) - \ln G^-(\vec{p}, \varepsilon).$$

В результате получаем

$$S = \frac{k_B}{2} \sum_{\vec{p}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4\pi i} \frac{\beta^2 \varepsilon}{\operatorname{ch}^2 \frac{\beta \varepsilon}{2}} \ln \frac{G_{\alpha}^+(\vec{p}, \varepsilon)}{G_{\alpha}^-(\vec{p}, \varepsilon)}. \quad (2.27)$$

Поскольку функции G^+ и G^- на вещественной оси комплексно сопряжены, энтропия (2.27) равна

$$S = \frac{k_B}{2} \sum_{\vec{p}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{\beta^2 \varepsilon}{\operatorname{ch}^2 \frac{\beta \varepsilon}{2}} \arg G_{\alpha}^+(\vec{p}, \varepsilon).$$

После дифференцирования энтропии по температуре получаем теплоемкость взаимодействующего электронного газа.

Задачи

2.1. Напишите гамильтониан взаимодействующих электронов в магнитном поле (см. Ахиезер И.А., Пелетминский С.В., ЖЭТФ 39, 1308 (1960); Бычков Ю.А., Горьков Л.П., ЖЭТФ 41, 1592 (1961)).

2.2. Покажите, что функция распределения электронов по импульсам равна

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\varepsilon G(\vec{p}, \varepsilon),$$

где контур C проходит сверху над вещественной осью в плоскости комплексной энергии (см. [6]).

2.3. Убедитесь в том, что энергия основного состояния системы взаимодействующих электронов в объеме V равна

$$E_0 = -\frac{iV}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_C d\varepsilon (\varepsilon_k + \varepsilon) G(\vec{k}, \varepsilon),$$

где C – вещественная ось ε , дополненная полуокружностью большого радиуса в верхней ε -полуплоскости, ε_k – энергия электрона с волновым вектором \vec{k} (см. [12]).

2.4. Свяжите среднее в формуле (2.8) с двухэлектронной функцией Грина (2.9).

2.5. Получите формулы (2.23) и (2.24) для электронного газа в магнитном поле.

2.6. Что изменится в формулах (2.23) и (2.24) в случае двумерного электронного газа? Учтите магнитное поле, перпендикулярное плоскости, занятой электронами.

2.7. Найдите связь E и Ω с G и Σ для электронного газа на поверхности цилиндра (см. (2.23) и (2.24) в р. 2).

3. Теория возмущений

3.1. Первый порядок теории возмущений

Предположим, что взаимодействие между электронами слабое, т. е.

$$\frac{mr_0^2 U_0}{\hbar^2} \ll 1$$

или

$$\frac{e^2}{\hbar v_0} \ll 1.$$

Тогда несколько первых членов ряда теории возмущений по степеням параметра взаимодействия можно получить из формулы [2,3]

$$\Omega(V, T, \mu) = \Omega_0(V, T, \mu) - \frac{1}{\beta} \ln \langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle, \quad (3.1)$$

где

$$\hat{\sigma}(\beta) = T_\tau \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \hat{V}_D(\tau) \right] \quad (3.2)$$

– температурный оператор рассеяния, $\hat{V}_D(\tau)$ – гамильтониан взаимодействия электронов (1.3) в представлении Дирака. Угловыми скобками в (3.1) обозначено гиббсовское усреднение по состояниям системы в отсутствие взаимодействия. В первом порядке теории возмущений из (3.2) получаем $\hat{\sigma} \approx 1 + \hat{\sigma}_1$, где

$$\hat{\sigma}_1(\beta) = - \int_0^\beta d\tau \hat{V}_D(\tau).$$

Подставляя сюда \hat{V} из (1.3), находим

$$\langle \hat{\sigma}_1 \rangle = -\frac{1}{2V} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{q}} \nu(\vec{q}) \int_0^\beta d\tau \times \quad (3.3)$$

$$\times \left\langle \hat{a}_{(\vec{k}_1 + \vec{q})\alpha_1}^{\dagger}(\tau) \hat{a}_{(\vec{k}_2 - \vec{q})\alpha_2}^{\dagger}(\tau) \hat{a}_{\vec{k}_2 \alpha_2}(\tau) \hat{a}_{\vec{k}_1 \alpha_1}(\tau) \right\rangle.$$

Здесь $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}(\tau)$ и $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}(\tau)$ – операторы уничтожения и рождения свободных электронов с волновым вектором \vec{k} и спиновым квантовым числом α . В технике Мацубары они зависят от τ согласно формулам:

$$\hat{a}_1(\tau) = \hat{a}_1(0)e^{-\xi_1 \tau}, \quad \hat{a}_1^{\dagger}(\tau) = \hat{a}_1^{\dagger}(0)e^{\xi_1 \tau}, \quad (3.4)$$

где $\xi_1 = \varepsilon_1 - \mu$ – энергия электрона в состоянии $1 = (\vec{k}_1, \alpha_1)$, отсчитанная от химпотенциала.

Входящее в формулу (3.3) среднее вычисляется по теореме Вика [2,3] для обычного произведения операторов:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_3 \hat{a}_4 \rangle &= \langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_4 \rangle \langle \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_3 \rangle - \langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_3 \rangle \langle \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_4 \rangle = \\ &= n_1 n_2 (\delta_{14} \delta_{23} - \delta_{13} \delta_{24}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$n_1 = \left(e^{\beta \xi_1} + 1 \right)^{-1}$$

– функция распределения Ферми-Дирака. После подстановки (3.4) и (3.5) в (1.3) получаем среднее значение энергии взаимодействия электронов:

$$\langle \hat{V} \rangle = \frac{1}{2} \nu(0) \frac{N^2}{V} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \nu(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2}. \quad (3.6)$$

В соответствии с теоремой о малых добавках [21] термодинамический потенциал в первом порядке теории возмущений равен

$$\Omega \approx \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \beta \langle \hat{V} \rangle \right) \approx \Omega_0 + \langle \hat{V} \rangle.$$

Первое слагаемое в правой части формулы (3.6) обусловлено прямым взаимодействием электронов, а второе – обменным. Спиновый множитель в формуле (3.5)

$$\delta_{\alpha_1\alpha_1}\delta_{\alpha_2\alpha_2} - \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_2\alpha_1}$$

означает, что в прямом взаимодействии участвуют электроны с любыми ориентациями спинов, а в обменном – с одинаковыми.

В системе с кулоновским взаимодействием функция (1.4) равна

$$\nu(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}. \quad (3.7)$$

При нулевой передаче импульса она обращается в бесконечность. Следовательно, первое слагаемое в (3.6) равно бесконечности, а второе имеет вид

$$E_{exch} = -\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2} \frac{4\pi e^2}{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2} n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2}. \quad (3.8)$$

Это слагаемое называется обменной энергией. Первое слагаемое в формуле (3.6) сокращается, если учесть прямое взаимодействие электронов с ионами в нейтральной системе. Действительно, энергия прямого кулоновского взаимодействия электронов друг с другом содержит множитель $e^2 n_e^2$, где n_e – плотность электронов. Вклад прямого взаимодействия ионов с зарядом Ze и плотностью n_i пропорционален $Z^2 e^2 n_i^2$. А энергия взаимодействия электронов с ионами имеет другой знак и содержит множитель $-2Ze^2 n_e n_i$. Следовательно, в энергии прямого взаимодействия частиц содержится множитель $e^2 n_e^2 - 2Ze^2 n_e n_i + Z^2 e^2 n_i^2 = e^2 (n_e - Zn_i)^2$, равный нулю в нейтральной системе. Это позволяет при суммировании по \vec{q} не учитывать слагаемое, содержащее $\nu(\vec{q})$, с $\vec{q} = 0$.

3.2. Обменная энергия

Обменная энергия электронного газа (3.8) в термодинамическом пределе равна [21]

$$E_{exch} = -4\pi e^2 V \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2}}{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2}. \quad (3.9)$$

Если электронный газ вырожден, фермиевская функция распределения равна $n_k = \Theta(k_0 - k)$, где k_0 – фермиевское волновое число, Θ – функция Хевисайда. В результате входящий в формулу (3.9) интеграл принимает вид

$$\int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \frac{1}{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2} = \int d^3 Q \int d^3 q \frac{1}{q^2},$$

Где

$$\vec{Q} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2), \quad \vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2.$$

Область интегрирования в этом интеграле определяется неравенствами

$$\left| \vec{Q} \pm \frac{\vec{q}}{2} \right| \leq k_0. \quad (3.10)$$

Если вектор \vec{q} фиксирован, равенство в правой части (3.10) задает две сферы в Q -пространстве радиуса k_0 , сдвинутые на расстояние q (рис. 3.1). Интеграл $\int d^3 Q$ при заданном q равен

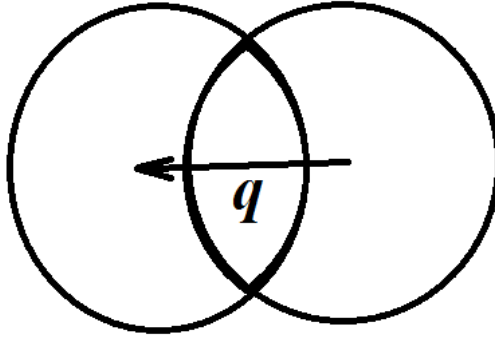


Рис. 3.1. Сфера Ферми и ее сдвинутый аналог

объему, заключенному между сферами:

$$\int d^3Q = \frac{2\pi}{3} h^2 (3k_0 - h),$$

где $h = k_0 - \frac{q}{2}$. Пределы интегрирования по q определяются неравенствами $0 \leq q \leq 2k_0$. В результате

$$\iint \frac{d^3Q d^3q}{q^2} = 4\pi^2 k_0^4,$$

$$E_{exch} = -V \frac{e^2 k_0^4}{4\pi^3}. \quad (3.11)$$

Выражая k_0 через химический потенциал, получаем вклад обменного взаимодействия в большой потенциал:

$$\Omega_{exch} = -V \frac{m^2 e^2 \mu^2}{\pi^3 \hbar^4}. \quad (3.12)$$

Вклад обменного взаимодействия в свободную энергию газа получаем по теореме о малых добавках [21]:

$$F_{exch} = -N \frac{3^{4/3}}{4\pi^{1/3}} e^2 n^{1/3}, \quad (3.13)$$

где $n = N/V$ – плотность электронов. Знак минус в (3.11)-(3.13) означает, что электроны с одинаковыми проекциями спинов избегают друг друга. В результате кулоновское отталкивание уменьшается, уменьшается и энергия.

Если электронный газ бoльцмановский, функция распределения в (3.9) равна

$$n_k = \exp[\beta(\mu - \varepsilon_k)]. \quad (3.14)$$

Тогда, учитывая $k_1^2 + k_2^2 = 2Q^2 + q^2/2$, получаем

$$\int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2} n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} = 4\pi^3 \left(\frac{m}{\hbar^2 \beta} \right)^2 e^{2\beta\mu}.$$

Обменная поправка к термодинамическому потенциалу оказывается равной

$$\Omega_{exch} = -V \frac{m^2 e^2}{4\pi^2 \hbar^4 \beta^2} e^{2\beta\mu}. \quad (3.15)$$

Поскольку $\mu < 0$, эта поправка экспоненциально мала. В этом предельном случае по теореме о малых добавках получаем

$$E_{exch} = F_{exch} = -V \frac{\pi e^2 \hbar^2 \beta n^2}{2m}. \quad (3.16)$$

Ниже выражения (3.12) и (3.15) будут получены методом функций Грина.

3.3. Второй порядок теории возмущений

Следуя методу, использованному в р. 3.1, учтем слагаемое второго порядка по параметру взаимодействия в разложении температурного оператора рассеяния (3.2):

$$\hat{\sigma}_2(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 T_\tau [\hat{V}_D(\tau_1) \hat{V}_D(\tau_2)].$$

Учитывая это слагаемое в (3.1), получаем поправку к термодинамическому потенциалу:

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2\beta} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \left\{ \langle T_\tau [\hat{V}_D(\tau_1) \hat{V}_D(\tau_2)] \rangle - \langle \hat{V}_D(\tau_1) \rangle \langle \hat{V}_D(\tau_2) \rangle \right\}. \quad (3.17)$$

После подстановки в (3.17) гамильтониана взаимодействия электронов (1.3) приходим к необходимости вычислить среднее от хронологического произведения восьми операторов вторичного квантования. Снова используем теорему Вика [2,3]. Среди большого числа слагаемых в выражении для среднего есть два существенных вклада. Им соответствуют два графика для поправки Ω_2 , изображенные на рис. 3.2 [2,22,23].

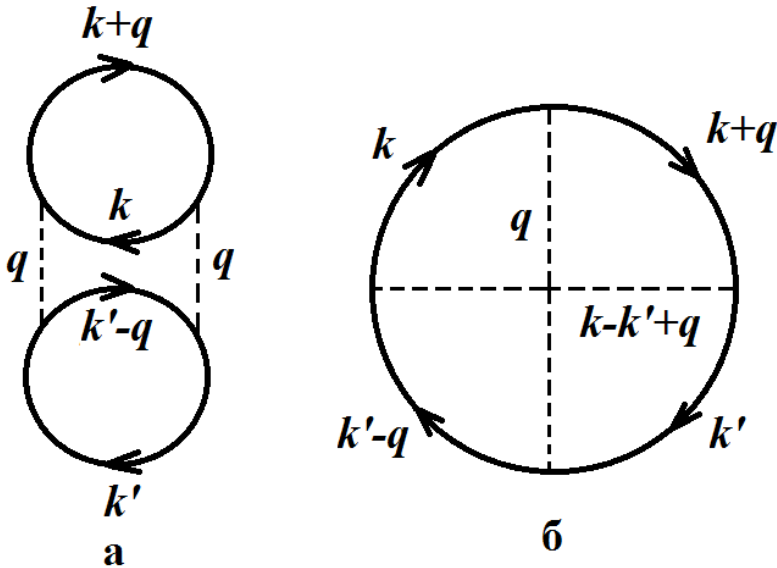


Рис. 3.2. Диаграммы для Ω_2

Диаграмма на рис. 3.2 (б) учитывает обменный эффект второго порядка. Остальные диаграммы второго порядка сокращаются за счет взаимодействия электронов с положительным фоном ионов.

Используя правила соответствия между диаграммами и формулами [2,3,16,17], получаем вклад диаграмм на рис. 3.2 в термодинамический потенциал:

$$\Omega_a + \Omega_b = \frac{V}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} \left(2v_{\bar{q}}^2 - v_{\bar{q}} v_{\bar{k}-\bar{k}+\bar{q}} \right) \times \quad (3.18)$$

$$\times \frac{\left(n_{\bar{k}} - n_{\bar{k}+\bar{q}} \right) \left(n_{\bar{k}'} - n_{\bar{k}'-\bar{q}} \right)}{\left(\varepsilon_{\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{k}+\bar{q}} + i\hbar\omega_n \right) \left(\varepsilon_{\bar{k}'} - \varepsilon_{\bar{k}'-\bar{q}} - i\hbar\omega_n \right)},$$

где $\omega_n = 2\pi n / \hbar\beta$ – четные «мацубаровские частоты». Поскольку величина $v_{\bar{q}}$ (1.4) не зависит от ω_n , в формуле (3.18) выполнено суммирование по нечетным мацубаровским частотам [2]:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_0(\bar{p}, \zeta_s) G_0(\bar{p} - \hbar\bar{q}, \zeta_s - \hbar\omega_n) = \frac{n_{\bar{p}} - n_{\bar{p}-\hbar\bar{q}}}{\varepsilon_{\bar{p}} - \varepsilon_{\bar{p}-\hbar\bar{q}} - i\hbar\omega_n}. \quad (3.19)$$

Знаки слагаемых в (3.18) различны потому, что число замкнутых электронных петель на рис. 3.2 разное. Спиновый множитель от диаграммы на рис. 3.2(а) равен

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_4} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_2 \alpha_1} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{\alpha_4 \alpha_3} = 4,$$

а от диаграммы на рис. 3.2(б)

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_4} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_2 \alpha_3} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{\alpha_4 \alpha_1} = 2.$$

Рассмотрим (3.18) при нулевой температуре. В этом случае [2]

$$\frac{1}{\beta} \sum_n \rightarrow \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Тогда входящий в (3.18) интеграл по ω вычисляется при помощи формулы [22]

$$\frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(i\hbar\omega - \xi)(-i\hbar\omega - \xi')} = \frac{\Theta(\xi') - \Theta(-\xi)}{\xi + \xi'},$$

где $\xi = \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}}$, $\xi' = \varepsilon_{\vec{k}'-\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}'}$. Подставляя этот интеграл в (3.18), при $T = 0K$ получаем

$$\begin{aligned} \Omega_a + \Omega_b &= \frac{V}{2} \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} \left(2v_q^2 - v_q v_{\vec{k}-\vec{k}'+\vec{q}} \right) \times \\ &\times \frac{\Theta(\varepsilon_{\vec{k}'} - \varepsilon_{\vec{k}'-\vec{q}}) - \Theta(\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}})}{\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} + \varepsilon_{\vec{k}'} - \varepsilon_{\vec{k}'-\vec{q}}} \left(n_{\vec{k}} - n_{\vec{k}+\vec{q}} \right) \left(n_{\vec{k}'} - n_{\vec{k}'-\vec{q}} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Выражение (3.20) не меняется при замене $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$, $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$, поэтому

$$\Omega_a + \Omega_b = V \int \frac{d^3k d^3k' d^3q}{(2\pi)^9} \frac{2v_q^2 - v_q v_{\vec{k}-\vec{k}'+\vec{q}}}{\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} + \varepsilon_{\vec{k}'} - \varepsilon_{\vec{k}'-\vec{q}}}, \quad (3.21)$$

где интегрирование выполняется по области $\vec{k} \in R_q$, $\vec{k}' - \vec{q} \in R_q$, R_q – область k -пространства между сферами на рис. 3.1 [22].

Рассмотрим подынтегральную функцию в (3.21) при $q \rightarrow 0$. В этом случае области интегрирования по \vec{k} и \vec{k}' представляют собой слои толщины $\sim q$ вблизи поверхности Ферми. Знаменатель в (3.21) также $\sim q$. Поэтому первое слагаемое под интегралом (3.21), содержащее v_q^2 , порядка q^{-3} . При интегрировании по q оно логарифмически расходится на нижнем пределе. Второе слагаемое $\sim q^{-1}$. Оно остается

конечным. Это означает, что ограничиться вторым порядком теории возмущений по параметру взаимодействия нельзя. Необходимо учесть диаграммы более высокого порядка. Они учитываются в приближении Хартри-Фока [24,25].

Задачи

3.1. Получите вклады первого и второго порядков теории возмущений по параметру взаимодействия электронов в собственно-энергетическую функцию при нулевой температуре.

3.2. Вычислите интеграл (3.21).

3.3. Найдите обменную энергию двумерного электронного газа. Учтите магнитное поле.

3.4. Получите обменную энергию электронного газа в магнитном поле (см. Danz R., Glasser M., Phys. Rev. B4, 94 (1971)).

3.5. Вычислите обменную энергию электронного газа на поверхности цилиндра (см. Эминов П.А., Сезонов Ю.И., Альперн А.В., Сальников Н.В., ЖЭТФ 130, 724 (2006)). Учтите продольное магнитное поле.

4. Приближение Хартри-Фока

Диаграммы первого порядка по параметру взаимодействия для функции Грина показаны на рис. 1.3 (б, в). Они описывают прямой и обменный процессы взаимодействия свободного электрона с ферми-фоном таких же электронов. На самом деле электрон, испытывающий акты взаимодействия с электронами среды, не свободен, а находится в среднем поле остальных электронов. Этот эффект можно учесть, заменяя тонкие электронные линии на рис. 1.3 (б, в) двойными (рис. 4.1).

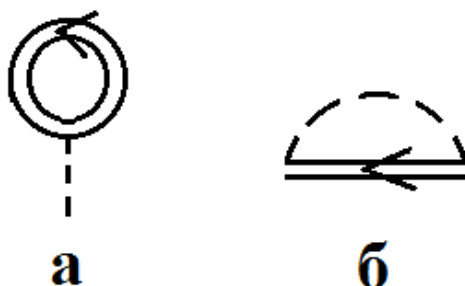


Рис. 4.1. Диаграммы для собственно-энергетической функции в приближении Хартри-Фока

Они соответствуют точным функциям Грина. Замена свободных функций Грина точными означает, что учитывается бесконечная подсовокупность диаграмм всех порядков теории возмущений путем усложнения тонких линий. Такая процедура называется «одеванием скелетов» [1]. Эта аппроксимация эквивалентна теории Хартри-Фока [24,25].

Вклад диаграмм на рис. 4.1 в собственно-энергетическую функцию равен [11]

$$-\Sigma_{HF}(\vec{p}, \zeta_s) = -\nu(0)n(T, \mu) + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \left[-\nu \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{\hbar} \right) \right] [-G(\vec{p}', \zeta_{s'})], \quad (4.1)$$

где

$$n = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(\vec{p}, \zeta_s) e^{i\zeta_s 0^+} \quad (4.2)$$

– плотность электронов. Поскольку функция (1.4) не зависит от частоты, суммирование по s' в (4.1) может быть выполнено. В результате

$$\Sigma_{HF}(\vec{p}) = \nu(0)n(T, \mu) - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \nu \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{\hbar} \right) f(\vec{p}'), \quad (4.3)$$

где $f(\vec{p})$ – функция распределения (2.4) частиц по импульсам. Из (4.3) видно, что функция Σ в приближении Хартри-Фока не зависит от ζ_s . Эта функция вещественна. Следовательно, в приближении Хартри-Фока затухание квазичастиц отсутствует. Из (2.22) следует, что функция Грина в рассматриваемом приближении равна

$$G_{HF}(\vec{p}, \zeta_s) = \frac{1}{i\zeta_s - \xi_{\vec{p}} - \Sigma_{HF}(\vec{p})}. \quad (4.4)$$

Полус анализического продолжения этой функции с дискретных точек $i\zeta_s$ на комплексную плоскость энергии дает спектр квазичастиц:

$$\varepsilon(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu + \nu(0)n - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{p}') \nu \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{\hbar} \right). \quad (4.5)$$

Чтобы получить функцию распределения электронов по импульсам, необходимо функцию Грина (4.4) подставить в

(2.4). Для вычисления входящей в (2.4) суммы по s введем интеграл в комплексной плоскости энергии z :

$$-\oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{z0^+}}{(e^{\beta z} + 1)(z - \xi_p - \Sigma_{HF})} .$$

Контур C – окружность большого радиуса, охватывающая полюсы подынтегральной функции в точках $i\zeta_s$ с вычетами $-\frac{1}{\beta}$ и полюс в точке $\xi + \Sigma_{HF}$. Когда радиус окружности стремится к бесконечности, сумма вычетов в полюсах $i\zeta_s$ совпадает с суммой (2.4). В результате она равна вычету в полюсе (4.5):

$$f(\vec{p}) = \left(e^{\beta \varepsilon(\vec{p})} + 1 \right)^{-1} . \quad (4.6)$$

Проблема расчета физических величин в приближении Хартри-Фока свелась к совместному решению уравнений (4.5) и (4.6). Это приближение – простейший пример самосогласованной теории.

В электрически нейтральной системе хартриевский вклад в энергию квазичастицы $v(0)n$ компенсируется вкладом ионов. Однако, в классическом предельном случае он доминирует [8]. Вычислим давление P газа нейтральных частиц, подчиняющихся законам классической статистики, Известно [21], что

$$n(T, \mu) = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{V, T} .$$

При фиксированной температуре отсюда получаем

$$dP = nd\mu , \quad (4.7)$$

где

$$n = e^{\beta[\mu - \nu(0)n]} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$$

– плотность газа. Отсюда при фиксированной температуре находим $dn = \beta n(d\mu - \nu dn)$. Учитывая (4.7), получаем

$$dP = \frac{1}{\beta} dn + \frac{1}{2} \nu dn^2.$$

После интегрирования этого соотношения с учетом $P(n=0) = 0$, находим уравнение состояния газа:

$$\left[P - \frac{1}{2} \nu(0)n^2 \right] = \frac{n}{\beta}.$$

Мы получили уравнение Ван-дер-Ваальса, в котором не учтены собственные размеры частиц, а постоянная a , учитывающая взаимодействие частиц, равна

$$a = -\frac{1}{2} \nu(0) = 2\pi \int_0^{+\infty} dr r^2 |\nu(r)|,$$

если частицы притягиваются друг к другу на любом расстоянии.

Задачи

4.1. Покажите, что энергия квазичастицы в приближении Хартри-Фока равна

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{\pi} e^2 k_0 \left(1 + \frac{k_0^2 - k^2}{2k_0 k} \ln \left| \frac{k + k_0}{k - k_0} \right| \right).$$

4.2. Получите энергию основного состояния и теплоемкость электронного газа в приближении Хартри-Фока.

4.3. Найдите спектр квазичастиц в двумерном электронном газе в приближении Хартри-Фока. Учтите магнитное поле.

4.4. Рассчитайте спектр квазичастиц и энергию основного состояния электронного газа на поверхности цилиндра в приближении Хартри-Фока. Учтите магнитное поле.

5. Вырожденный ферми-газ низкой плотности

В этом разделе рассматриваются свойства вырожденной однородной системы фермионов со спином $\frac{1}{2}$ с короткодействующим потенциалом отталкивания частиц, не зависящим от спинов [3,5,11,26,27]. Речь идет об экранированном взаимодействии электронов в металлах, взаимодействии атомов He^3 , о ядерной материи, если пренебречь притягивающей частью потенциала взаимодействия нуклонов. Для определенности будем говорить об электронах. Во введении упоминалось, что такая система характеризуется тремя величинами: r_0 , U_0 , k_0 . Из них можно составить два безразмерных параметра: $\alpha = \frac{mr_0^2 U_0}{\hbar^2}$ – параметр взаимодействия и $\eta = r_0 k_0$ – параметр сжатия. Это позволяет рассмотреть несколько частных случаев. Если $\alpha \ll 1$ и $\eta \ll 1$, частицы сталкиваются редко, поэтому можно ограничиться парными столкновениями. Малость α означает, что применима теория возмущений по этому параметру. В случае $\alpha \gg 1$, $k_0 r_0 \ll 1$ столкновения являются по-прежнему редкими, однако из-за сильного взаимодействия частиц теория возмущений по параметру α не может быть использована. Такая аппроксимация называется газовым приближением [26,27]. Если частицы взаимодействуют по закону Кулона, потенциал не может быть охарактеризован величинами r_0 и U_0 . Тогда единственным безразмерным параметром теории возмущений является $\frac{e^2}{\hbar v_0}$, где v_0 – скорость Ферми. Этот случай при $\frac{e^2}{\hbar v_0} \ll 1$ будет рассмотрен в следующем разделе.

Случай $\alpha \gg 1$ и $\eta \gg 1$ соответствует теории ферми-жидкости Ландау [28,29] и в этом пособии не рассматривается.

Будем считать, что радиус r_0 действия межчастичного потенциала мал по сравнению со средним расстоянием между частицами $n^{-1/3}$, т. е. $k_0 r_0 \ll 1$, где $k_0 = (3\pi^2 n)^{1/3}$. Оценки [5, 26, 27] и структура борновского ряда [18] для амплитуды многократного рассеяния частиц в вакууме показывают, что основную роль в электронном газе низкой плотности играют лестничные диаграммы для собственно-энергетической функции Σ . Нас же интересуют процессы рассеяния в среде, при наличии ферми-фона таких же частиц. К этому классу диаграмм относятся обе диаграммы первого порядка на рис. 1.3 (б, в). Они описывают прямое и обменное рассеяние частиц на частицах фона. Диаграммы второго порядка показаны на рис. 1.3 (г, д). Оказывается [26,27], что с каждой дырочной линией на диаграммах связан множитель $k_0 r_0$, поэтому диаграммы на рис. 3.1 (б, в, г, д) дают вклад в Σ порядка $k_0 r_0$. С ростом числа l дырочных линий показатель степени в $(k_0 r_0)^l$ возрастает. Поскольку $k_0 r_0 \ll 1$, в пределе низкой плотности газа наиболее существенны диаграммы с одной дырочной линией.

Используя правила соответствия между диаграммами и формулами [2,3], для диаграмм первого порядка на рис. 1.3 при $T = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \Sigma_1^b(\vec{p}, \varepsilon) &= -\frac{\nu(0)}{i\hbar} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha} i\hbar G_{\alpha\alpha}^0(\vec{p}', \varepsilon') e^{i\varepsilon'0^+}, \\ \frac{1}{i\hbar} \Sigma_1^c(\vec{p}, \varepsilon) &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi\hbar} \frac{1}{i\hbar} \nu\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}'}{\hbar}\right) i\hbar G_0(\vec{p}', \varepsilon') e^{i\varepsilon'0^+}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Минус в Σ_1^b связан с электронной петлей на диаграмме. Поскольку $\nu(\vec{q})$ (1.4) не зависит от ε' , интеграл по ε' дает функцию распределения частиц по импульсам [2]:

$$f(\vec{p}) = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} G(\vec{p}, \varepsilon) e^{i\varepsilon 0^+}.$$

Тогда $\Sigma_1^a = \nu(0)n_0$, где n_0 – плотность электронов с обеими ориентациями спина в идеальном газе, константа $\nu(0) = \int d^3r \nu(r)$ связана с борновской длиной a_0 s – рассеяния частиц в системе центра инерции соотношением [18]

$$\nu(0) = \frac{4\pi\hbar^2 a_0}{m}.$$

Читателю предлагается показать, что Σ_1^c при $k_0 a_0 \ll 1$ также пропорционально $k_0 a_0$.

Вклад диаграмм второго порядка на рис. 1.3 (д, е) равен

$$\begin{aligned} \Sigma_2(p) &= \\ &= 2\hbar^2 \int dq \int dp' \nu(q) \nu(-q) G_0(p - \hbar q) G_0(p' + \hbar q) G_0(p') - \\ &- \hbar^2 \int dq \int dp' \nu(q) \nu\left(\frac{p' - p}{\hbar} - q\right) G_0(p' - \hbar q) G_0(p + \hbar q) G_0(p'), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $p = (\vec{p}, \varepsilon)$ – 4-импульс,

$$\int dp = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar}, \quad \int dq = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

В формуле (5.2) учтено

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha \alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_2 \alpha'} = \delta_{\alpha \alpha'}, \quad \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_2 \alpha_1} = 2.$$

Из (5.2) видно, как необходимо расставить 4-импульсы на диаграммах, чтобы в каждой вершине выполнялся закон сохранения 4-импульса.

Формулы (5.1) и (5.2) получены на основе теории возмущений. В них предполагается, что $k_0 r_0 \ll 1$ и

$$\frac{m r_0^2 U_0}{\hbar^2} \ll 1.$$

Отказываясь от второго неравенства, мы вынуждены просуммировать бесконечную подсовокупность лестничных диаграмм для Σ , в которых пунктирные линии связывают лишь линии частиц. При этом не учитываются диаграммы, в которых пунктирные линии связывают линии частиц и дырок, а также диаграммы с замкнутыми электронными петлями, усложняющие линии взаимодействия [26,27]. Остаются лестничные диаграммы с одной дырочной линией. Увеличение числа пунктирных линий – «ступенек» лестницы – приводит к следующему приближению по параметру взаимодействия α . Увеличение же числа дырочных линий сопровождается появлением малых множителей $(k_0 r_0)^l$. Таким образом, газовое приближение – это суммирование бесконечной подсовокупности диаграмм со всеми степенями α и учет нескольких членов разложения по параметру сжатия η . В работах [26,27] учтены члены порядка $(k_0 a)^2$, где a – длина s -рассеяния.

Чтобы просуммировать лестничные диаграммы, нарисуем диаграммы на рис. 1.3 (б,в,г,д) так, чтобы была видна их лестничная структура [3] (рис. 5.1). Кроме того, в

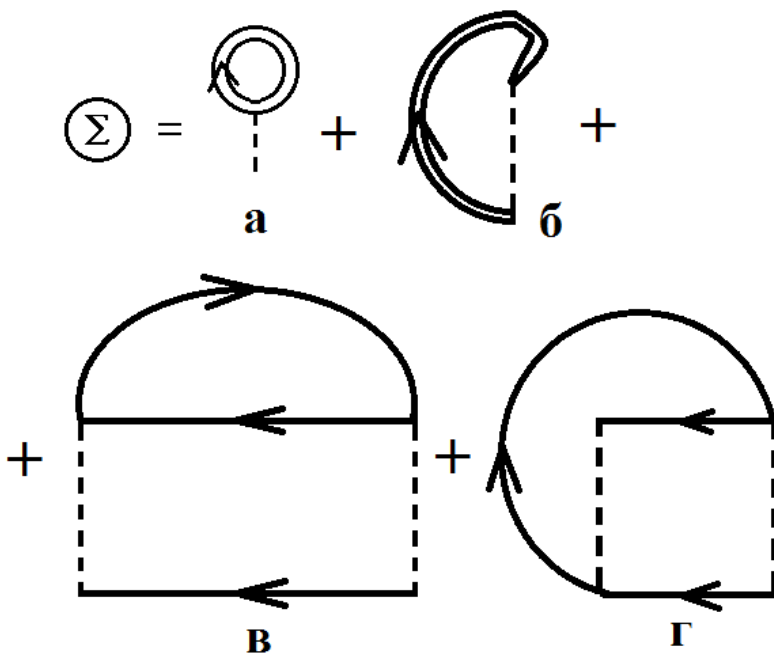


Рис. 5.1. Лестничные диаграммы 1-го и 2-го порядка для Σ

диаграммах 1-го порядка используем процедуру «одевания скелетов» [1]. Ограничиваясь членами 2-го порядка по α , мы должны двойным линиям сопоставить функции Грина, вычисленные с учетом членов 1-го порядка.

Диаграммы на рис. 5.1 представляют собой первые члены лестничного ряда для «четырёххвостки», в которой пара внешних линий «закорочена» друг с другом двумя различными способами [3]. Лестничные диаграммы для четырёххвостки – двухчастичной функции Грина [2,3]

$$K(3,4;1,2) = -\frac{1}{(i\hbar)^2} \langle \Psi_0 | T_t (\hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \hat{\psi}_1^+ \hat{\psi}_2^+) | \Psi_0 \rangle, \quad (5.3)$$

где $1 = (\alpha_1, \vec{r}_1, t_1), \dots$, показаны на рис. 5.2. Отбрасывая в этих

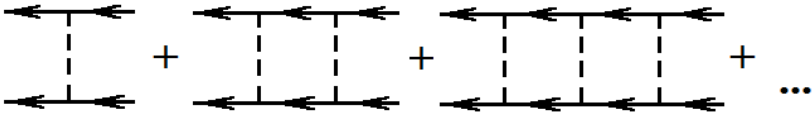


Рис. 5.2. Лестничные диаграммы для четыреххвостки

диаграммах «хвосты», получаем вершинную функцию Γ в лестничном приближении [2,3]. Она изображена квадратом на рис. 5.3. Сумме этих диаграмм соответствует аналитическое

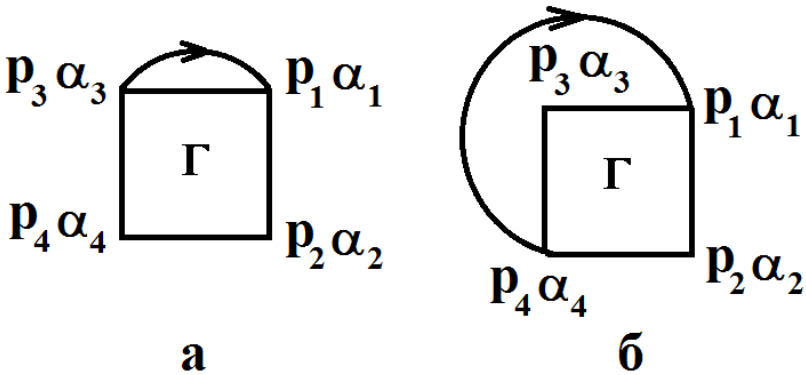


Рис. 5.3. Вершинная функция Γ в лестничном приближении с «закороченными» внешними линиями

выражение:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\alpha_3 \alpha_4, \alpha_1 \alpha_2} (p_3, p_4; p_1, p_2) = \\ & = \delta_{\alpha_3 \alpha_1} \delta_{\alpha_4 \alpha_2} \left[\Gamma_a (p_3, p_4, p_1, p_2) + \Gamma_b (p_3, p_4, p_1, p_2) \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где 4-импульсы соответствуют «хвостам» функции K , которые на рис. 5.3 не все показаны. Входящие в (5.4) функции $\Gamma_{a,b}$ равны

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \Gamma_a(p_3 p_4, p_1 p_2) &= \frac{1}{i\hbar} \nu \left(\frac{p_3 - p_1}{\hbar} \right), \\ \frac{1}{i\hbar} \Gamma_b(p_3 p_4, p_1 p_2) &= \\ &= \int dq \frac{1}{i\hbar} \nu(q) \frac{1}{i\hbar} \nu \left(\frac{p_3 - p_1}{\hbar} - q \right) i\hbar G_0(p_3 - \hbar q) i\hbar G_0(p_4 + \hbar q). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Символы Кронекера в (5.4) означают, что в результате взаимодействия частиц проекции их спинов не меняются. Соответствующие ряду (5.4) графики показаны на рис. 5.4. В

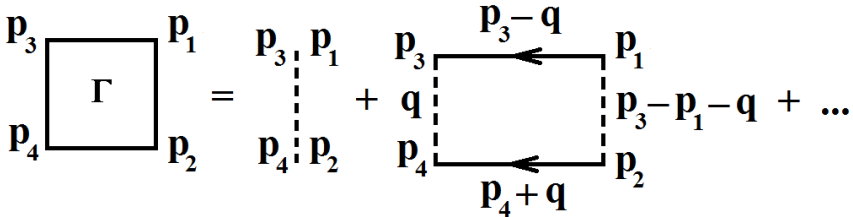


Рис. 5.4. Лестничный ряд для вершинной функции

равновесной однородной системе, которая рассматривается в пособии, $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

Функция Γ удовлетворяет уравнению Бете-Солпитера [30]:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_3 p_4, p_1 p_2) &= \nu(p_3 - p_1) + \\ &+ i\hbar \int dq \nu(q) G_0(p_3 - \hbar q) G_0(p_4 + \hbar q) \Gamma(p_3 - \hbar q, p_4 + \hbar q; p_1, p_2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Это уравнение показано на рис. 5.5.

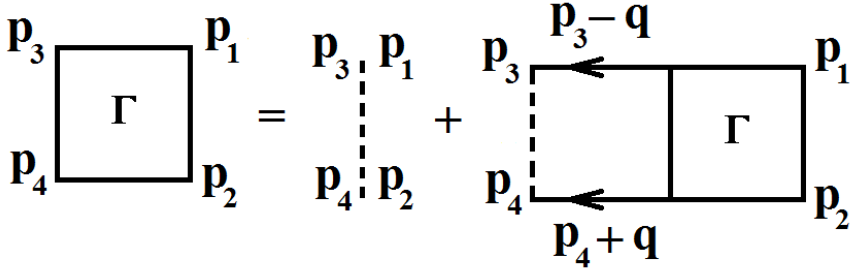


Рис. 5.5. Графическое изображение уравнения Бете-Солпитера (5.6)

Диаграммы с одной дырочной линией на рис. 5.3 дают вклад в собственно-энергетическую функцию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \Sigma_{\alpha_4 \alpha_2}^a(p) &= - \sum_{\alpha_1 \alpha_3} \int dp' i\hbar G_{\alpha_1 \alpha_3}^0(p') \frac{1}{i\hbar} \Gamma_{\alpha_3 \alpha_4, \alpha_1 \alpha_2}(p'p, p'p) = \\ &= -2\delta_{\alpha_4 \alpha_2} \int dp' G_0(p') \Gamma(p'p, p'p), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \Sigma_{\alpha_3 \alpha_2}^b(p) &= \sum_{\alpha_1 \alpha_4} \int dp' G_{\alpha_1 \alpha_4}^0(p') \Gamma_{\alpha_3 \alpha_4, \alpha_1 \alpha_2}(pp', p'p) = \\ &= \delta_{\alpha_3 \alpha_2} \int dp' G_0(p') \Gamma(pp', p'p). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Вклад диаграмм на рис. 5.1 (а,б) в собственно-энергетическую функцию после удвоения электронных линий на рис. 1.3 (б,в) равен

$$\begin{aligned} \Sigma_1^a(p) &= \nu(0)n(\mu), \\ \Sigma_1^b(p) &= - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \nu(\vec{q}) f(\vec{p} - \hbar\vec{q}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Эти выражения получаются из (5.1) заменой G_0 на G . Поскольку $qr_0 \ll 1$, то компонента Фурье $\nu(\vec{q})$ в (5.9) существенно зависит от q лишь при

$$q \gg \frac{1}{r_0} = \frac{k_0}{k_0 r_0}.$$

Эти значения q в разреженном газе велики по сравнению с k_0 . Нас же интересуют значения $|k - k_0| \ll \frac{1}{r_0}$, поэтому при $q \gg r_0^{-1}$ можно положить $f(\vec{p} - \hbar\vec{q}) \approx 0$. Тогда $\nu(q)$ в (5.9) можно заменить на $\nu(0)$, а f – на f_0 . Допустимая при этом погрешность не отражается даже на слагаемых в Σ порядка $(k_0 r_0)^2$ [3]. В результате вклад диаграмм на рис. 5.1 (а,б) в Σ равен

$$\Sigma_1^a + \Sigma_1^b = \frac{1}{2} \nu(0) n_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a n_0, \quad (5.10)$$

где a – длина рассеяния с учетом членов второго порядка. Во втором приближении она равна [3]

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \left[\nu(0) + \frac{\nu^2(0)}{V} \sum_{\vec{p}'_1} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \right],$$

где \vec{p}_1, \vec{p}_2 и \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 – импульсы частиц до и после столкновения.

Вычислим функцию Γ_b (5.5). Входящая в нее функция Грина идеального газа равна [2,3]

$$G_0(p, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu + i0 \text{sign}(p - p_0)}. \quad (5.11)$$

После подстановки этой функции в формулу (5.5) и сдвига переменной интегрирования $p_3 - \hbar q = p'$ получаем сходящийся интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi\hbar} G_0(\vec{p}', \varepsilon') G_0(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}', \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'), \quad (5.12)$$

поскольку $G_0 \sim 1/\varepsilon$, когда $\varepsilon \rightarrow \infty$. Это позволяет замкнуть путь интегрирования в верхней или нижней полуплоскости переменной ε' . Интеграл отличен от нуля, если полюсы подынтегральной функции лежат в разных полуплоскостях, т.е.

$$\text{sign}(p' - p_0) = \text{sign}(|\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}'| - p_0). \quad (5.13)$$

Тогда по теореме Коши о вычетах интеграл (5.12) равен

$$\frac{1}{i\hbar} \left\{ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\mu - \frac{1}{2m} \left[p'^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}')^2 \right] + i0 \text{sign}(p' - p_0) \right\}^{-1}.$$

В результате

$$\begin{aligned} \Gamma_b(p_3 p_4, p_1 p_2) = & \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} v\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}'}{\hbar}\right) v\left(\frac{\vec{p}' - \vec{p}_3}{\hbar}\right) \times \\ & \times \left\{ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\mu - \frac{1}{2m} \left[p'^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}')^2 \right] + i0 \text{sign}(p' - p_0) \right\}^{-1} \times \\ & \times \text{sign}(p' - p_0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Чтобы учесть условие (5.13), мы добавили $\text{sign}(p' - p_0)$ в числителе (5.14). Его можно заменить на $1 - \Theta(\vec{p}') - \Theta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}')$, где Θ – функция Хевисайда. Выражение (5.14) представляет собой поправку второго порядка по межэлектронному взаимодействию к функциям Γ_1 и Σ_1 . Но эта поправка уже учтена в (5.10) путем перехода к длине рассеяния a , полученной с учетом членов второго порядка. Следовательно, необходимо вычесть из (5.14)

вещественную часть выражения (5.10) в вакууме, при $p_0 = 0, \mu_0 = 0$ и $\varepsilon_1 = p_1^2/2m, \varepsilon_2 = p_2^2/2m$. Что касается мнимой части в (5.14), то она приводит к поправкам в Σ_2 более высокого порядка малости, чем $(ak_0)^2$ [3]. После такого вычитания в (5.14) можно учесть $ak_0 \ll 1$ и взять $\nu(q)$ при $q = 0$, положив $\nu(0) = 4\pi\hbar^2 a/m$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \Gamma_b(p_3 p_4, p_1 p_2) &= \left(\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \right)^2 \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ &\times \left\{ [1 - \Theta(\vec{p}') - \Theta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}')] \right\} \times \\ &\times \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\mu - \frac{1}{2m} \left(p'^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}')^2 \right) + \right. \\ &\left. + i0 \operatorname{sign}(p' - p_0) \right]^{-1} - \mathbf{P} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p'^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}')^2} \Bigg\}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где \mathbf{P} – символ главного значения интеграла. Выражение (5.15) симметрично относительно перестановки p_1 и p_2 , поэтому слагаемые в правой части (5.4) одинаковы. Следовательно, после подстановки (5.15) в (5.7) и (5.8) получаем поправку

$$\Sigma_{a,b}^{(2)}(p) = -i\hbar \int dp_1 G_0(p_1) \Gamma_2(pp_1, pp_1) \quad (5.16)$$

порядка $(ak_0)^2$ к собственно-энергетической функции. Здесь $\Gamma_2 = \Gamma_a + \Gamma_b$.

Входящий в (5.16) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1$ отличен от нуля, если полюсы подынтегральной функции расположены в разных полуплоскостях, т. е.

$$\text{sign}(p_1 - p_0) = -\text{sign}(p' - p_0). \quad (5.17)$$

Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, находим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{2\pi\hbar} \left[\varepsilon_1 - \frac{p_1^2}{2m} + \mu + i0\text{sign}(p_1 - p_0) \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\varepsilon + \varepsilon_1 + 2\mu - \frac{1}{2m} \left(p'^2 + (\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')^2 \right) + i0\text{sign}(p' - p_0) \right]^{-1} = \quad (5.18) \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[\varepsilon + \mu + \frac{1}{2m} \left(p_1^2 - p'^2 - (\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')^2 \right) + i0\text{sign}(p' - p_0) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Суммируя вклады (5.10) и (5.16), учитывая (5.18), получаем разложение Σ по степеням ak_0 с учетом членов порядка $(ak_0)^2$:

$$\begin{aligned} \Sigma(\vec{p}, \varepsilon) &= \frac{2\pi\hbar^2}{m} an_0 + \Sigma_2(\vec{p}, \varepsilon), \\ \Sigma_2(\vec{p}, \varepsilon) &= \left(\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \right)^2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ & \times \left\{ [1 - \Theta(\vec{p}') - \Theta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')] \times [\Theta(\vec{p}_1) - \Theta(\vec{p}')] \times \right. \\ & \times \left[\varepsilon + \mu + \frac{1}{2m} \left(p_1^2 - p'^2 - (\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')^2 \right) + \right. \\ & \left. \left. + i0\text{sign}(p' - p_0) \right]^{-1} - 2m\Theta(\vec{p}_1) \mathcal{P} \left[p^2 - p_1^2 - p'^2 - (\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (5.19) \end{aligned}$$

Множитель $\Theta(\vec{p}_1) - \Theta(\vec{p}')$ заменяет $-\text{sign}(p_1 - p_0)$ при условии (5.17).

Вещественная и мнимая части (5.19) разделяются при помощи тождества

$$\frac{1}{x \pm i0} = P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x).$$

Вещественная часть дает спектр квазичастиц, а мнимая – затухание. Спектр определяется формулой [2,3]

$$\varepsilon(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{2\pi\hbar^2}{m} an(\mu) + \Sigma_2 \left(\frac{p^2}{2m} - \mu, \vec{p} \right).$$

Функции Θ , входящие в (5.19), определяют пределы интегрирования по p_1 и p' . В результате интегрирования получаем [26,27]

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) \frac{m}{p_0^2} &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3\pi} ak_0 + \frac{2}{15\pi^2} (ak_0)^2 \frac{1}{x} \times \\ &\times \left[11x + 2x^5 \ln \left| \frac{x^2}{x^2 - 1} \right| - 10(x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \right. \\ &\left. - (2-x^2)^{5/2} \ln \left| \frac{1+x\sqrt{2-x^2}}{1-x\sqrt{2-x^2}} \right| \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$x = \frac{p}{p_0} \leq \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) \frac{m}{p_0^2} &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3\pi} ak_0 + \frac{2}{15\pi^2} (ak_0)^2 \frac{1}{x} \times \\ &\times \left[11x + 2x^5 \ln \frac{x^2}{x^2 - 1} - 10(x^2 - 1) \ln \frac{x+1}{x-1} - \right. \\ &\left. - 2(x^2 - 2)^{5/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 2} \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$x \geq \sqrt{2}.$$

Критическое значение $x = \sqrt{2}$ связано с тем, что начиная с импульсов $p = \sqrt{2}p_0$, возможно рассеяние на всех

частицах фона, а при $p < \sqrt{2}p_0$ взаимодействуют только частицы с энергиями

$$2\mu - \frac{p^2}{2m} \leq \frac{p_1^2}{2m}, \quad \frac{p_2^2}{2m} \leq \mu.$$

Мнимая часть (5.19) равна

$$\begin{aligned} \text{Im}\Sigma(\vec{p}, \varepsilon) = & -\pi \left(\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \right)^2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ & \times \left\{ \Theta(\vec{p}_1) [1 - \Theta(\vec{p}')] [1 - \Theta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')] - [1 - \Theta(\vec{p}_1)] \times \right. \\ & \left. \times \Theta(\vec{p}') \Theta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}') \right\} \times \\ & \times \delta \left[\varepsilon + \mu + \frac{1}{2m} \left(p_1^2 - p'^2 - (\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

При переходе от (5.19) к (5.22) учтено $\Theta^2(\vec{p}) = \Theta(\vec{p})$, $\text{sign}(p - p_0) = 1 - 2\Theta(\vec{p})$.

Квазичастица затухает потому, что она отдает часть своей энергии ферми-фону. При этом рождается пара частица-дырка. Например, слагаемое

$$\Theta(\vec{p}_1) [1 - \Theta(\vec{p}')] [1 - \Theta(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}')]]$$

отлично от нуля, если $p' > p_0$, $|\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}'| > p_0$, $p_1 < p_0$. Эти неравенства отвечают процессу, в котором квазичастица с импульсом $p > p_0$ переходит в состояние p' ($p > p' > p_0$). При этом импульс $\vec{p} - \vec{p}'$ передается ферми-фону ($p_1 < p_0$). Частица внутри ферми-фона возбуждается в состояние $\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}'$ вне ферми-фона. Это означает появление двух квазичастиц – дырки в состоянии с импульсом $-\vec{p}_1$ и частицы в состоянии $\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}'$. Дельта-функция в (5.22) обеспечивает сохранение

энергии в этом процессе, так как $\varepsilon + \mu$ – начальная энергия квазичастицы $\varepsilon(\vec{p})$ и

$$\varepsilon(\vec{p}) = \varepsilon(\vec{p}') + [\varepsilon(\vec{p} + \vec{p}_1 - \vec{p}') - \varepsilon(\vec{p}_1)].$$

Рассматриваемое слагаемое дает затухание квазичастицы с $\varepsilon > \mu$. Второе слагаемое в фигурных скобках (5.22) описывает процесс рождения пары квазичастиц дыркой. Это слагаемое дает затухание квазичастиц с $\varepsilon < \mu$.

Поскольку декремент затухания квазичастиц $\gamma = -\text{Im}\Sigma$, то для γ из (5.22) получаем выражения [26,27]:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma m}{p_0^2} &= -\frac{1}{4\pi} (ak_0)^2 (1-x^2), \quad x \leq 1, \\ \frac{\gamma m}{p_0^2} &= \frac{1}{15\pi} (ak_0)^2 \frac{1}{x} \left[5x^2 - 7 + 2(1-x^2)^{5/2} \right], \quad 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ \frac{\gamma m}{p_0^2} &= \frac{1}{15\pi} (ak_0)^2 \frac{1}{x} (5x^2 - 7), \quad x \geq \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Из формул (5.20) и (5.21) вблизи границы Ферми ($|p - p_0| \ll p_0$) следует

$$\varepsilon(p) = \mu + \frac{p_0}{m_*} (p - p_0), \quad (5.24)$$

где

$$m_* = m \left[1 + \frac{8}{15\pi^2} (7 \ln 2 - 1) (ak_0)^2 \right] \quad (5.25)$$

– эффективная масса квазичастицы на границе Ферми. Она входит в теплоемкость электронного газа при низких температурах [21]

$$\frac{C_V}{V} = \frac{m_* k_B k_0}{3\hbar^2} T.$$

Эксперименты с чистым газом He^3 дают [11] $m^*/m = 2.9$, что хорошо согласуется с (5.25).

Декремент затухания при $p \sim p_0$ равен

$$\gamma = \frac{1}{\pi m} (ak_0)^2 (p - p_0)^2 \text{sign}(p - p_0). \quad (5.26)$$

Как и следовало ожидать, полюс одноэлектронной функции Грина расположен ниже вещественной оси в комплексной плоскости энергии при $p > p_0$ и выше, если $p < p_0$.

При больших импульсах $p \gg p_0$, но $pa/\hbar \ll 1$, имеем

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{2p_0^2}{3\pi m} ak_0 \right) - i \frac{p_0 p}{3\pi m} (k_0 a)^2. \quad (5.27)$$

Отношение γ/ε оказывается малым по сравнению с единицей, т. е. квазичастицы устойчивы вблизи границы Ферми.

Химический потенциал газа частиц, равный энергии квазичастицы при $p = p_0$, имеет вид

$$\mu = \frac{p_0^2}{2m} \left[1 + \frac{4}{3\pi} ak_0 + \frac{4}{15\pi^2} (11 - 2 \ln 2) (ak_0)^2 \right]. \quad (5.28)$$

Формулы (5.25) и (5.28) совпадают с полученными Абрикосовым и Халатниковым [31] на основе теории ферми-жидкости.

Используя известную формулу термодинамики [21]

$$\mu = \left(\frac{\partial E_0}{\partial N} \right)_V,$$

получаем энергию основного состояния газа [26,27,32]:

$$E_0 = N \frac{3}{5} \frac{p_0^2}{2m} \left[1 + \frac{10}{9\pi} ak_0 + \frac{4}{21\pi^2} (11 - 2 \ln 2) (ak_0)^2 \right]. \quad (5.29)$$

Производная по N вычисляется при постоянной энтропии $S = 0$. Третье слагаемое в формуле (5.29) обусловлено

модификацией промежуточных состояний принципом исключения. В 1957 году формула (5.29) получена Ли и Янгом методом псевдопотенциала [32].

Скачок функции распределения электронов на границе Ферми

$$f(p_0 - 0) - f(p_0 + 0) = Z$$

оказывается равным

$$Z = 1 - \frac{8 \ln 2}{\pi^2} (ak_0)^2.$$

Он получен в 1957 году Мигдалом [33].

Задачи

5.1. Покажите, что в первом порядке теории возмущений по параметру $ak_0 \ll 1$ энергия основного состояния электронного газа с короткодействующим отталкиванием частиц равна

$$E_0 = N\varepsilon_0 \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3\pi} ak_0 \right).$$

5.2. Решите задачу рассеяния электронов короткодействующим потенциалом отталкивания (притяжения). Найдите амплитуду рассеяния. Рассмотрите потенциальное и резонансное рассеяние. Где расположены полюсы амплитуды рассеяния?

5.3. В задаче 5.2 учтите магнитное поле.

5.4. Выполнить то же самое, что в задачах 5.2 и 5.3, в двумерном случае (см. [18]).

5.5. Получите длину рассеяния a во втором порядке теории возмущений по межэлектронному взаимодействию.

5.6. Выполните интегрирование в формуле (5.19).

5.7. Получите спектр и затухание квазичастиц, энергию основного состояния для двумерного электронного газа низкой плотности.

5.8. Найдите связь амплитуды рассеяния квазичастиц с вершинной функцией (см. [3]).

6. Электронный газ высокой плотности

6.1. Суммирование кольцевых диаграмм

Идея ограничиться суммированием подсовокупности необменных кольцевых диаграмм для электронного газа высокой плотности принадлежит Гелл-Манну и Бракнеру [34,35]. Одна из таких диаграмм для собственно-энергетической функции изображена на рис. 6.1. Все линии

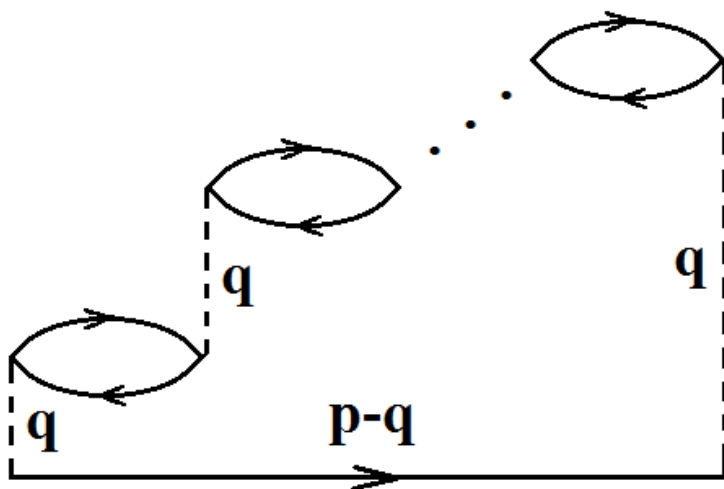


Рис. 6.1. Кольцевая диаграмма для собственно-энергетической функции

взаимодействия на рис. 6.1 имеют одинаковый 4-импульс $q = (\vec{q}, \omega_n)$. Поэтому диаграммы, содержащие различное число колец, наиболее сильно расходятся. Кольцевая диаграмма третьего порядка по межэлектронному взаимодействию с указанием 4-импульсов на линиях показана на рис. 6.2.

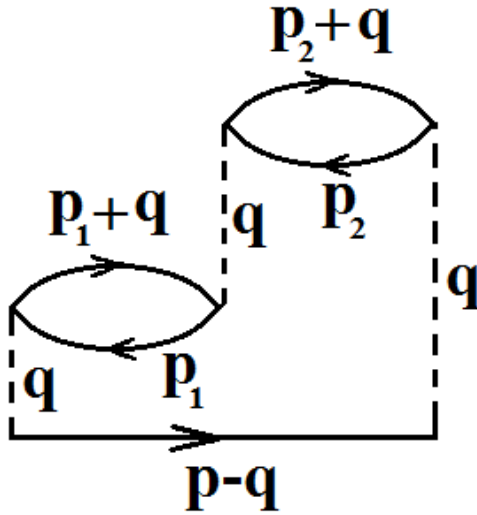


Рис. 6.2. Кольцевая диаграмма третьего порядка по параметру

$$\alpha = e^2 / \hbar v_0$$

Поскольку $\nu(q) = 4\pi e^2 / q^2$, эта диаграмма содержит под знаком интеграла по q наиболее сильно расходящийся интеграл $\int d^3q / q^6$. Вклад диаграммы на рис. 6.1 в функцию $\Sigma(\vec{p}, \zeta_s)$, содержащей l линий взаимодействия, пропорционален $\int d^3q / q^{2l}$. Все эти диаграммы дают бесконечно большой вклад в Σ . По этому поводу Маттук [1]

высказался так: «Самое замечательное состоит в том, что эту бесконечную сумму бесконечных слагаемых можно вычислить и результат оказывается конечным! Это приводит к так называемому «приближению случайных фаз» (RPA), хорошо работающему в пределе высоких плотностей, где $r_s < 1 \dots$ ».

Гелл-Манн и Бракнер [11,34] ограничились суммированием диаграммы первого порядка на рис. 1.3 (в), второго порядка на рис. 1.3 (д), 6.1 и необменных кольцевых диаграмм:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_r, \quad (6.1)$$

где

$$\Sigma_r = \sum_{l=2}^{\infty} \Sigma_{rl}$$

– сумма кольцевых диаграмм.

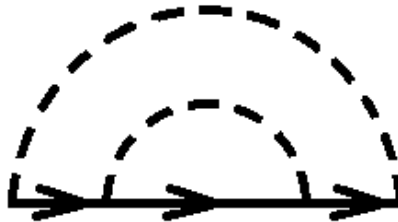


Рис. 6.3. Диаграмма второго порядка, входящая в (6.1)

Входящие в (6.1) слагаемые равны

$$\begin{aligned}
-\Sigma_1(\vec{p}, \zeta_s) &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s'} [-G_0(\vec{p}', \zeta_{s'})] \left[-\nu \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{\hbar} \right) \right] e^{i\zeta_{s'} 0^+}, \\
-\Sigma_2(\vec{p}, \zeta_s) &= \\
&= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s'} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n [-G_0(\vec{p} - \hbar\vec{q}, \zeta_s - \hbar\omega_n)] \times \\
&\times [-G_0(\vec{p}', \zeta_{s'})] [-G_0(\vec{p}' + \hbar\vec{q}, \zeta_{s'} + \hbar\omega_n)] [-\nu(\vec{q})] \times \\
&\times \left[-\nu \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}' - \vec{q}}{\hbar} \right) \right] + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s'} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{s_1} [-G_0(\vec{p}', \zeta_{s'})]^2 \times \\
&\times [-G_0(\vec{p}_1, \zeta_{s_1})] \left[-\nu \left(\frac{\vec{p}' - \vec{p}_1}{\hbar} \right) \right] \left[-\nu \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{\hbar} \right) \right] e^{i\zeta_{s_1} 0^+}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Вычисления Σ_r упрощаются, если ввести эффективное взаимодействие электронов [1,2,11,16,17] $U_{eff}(\vec{q}, \omega_n)$, которое учитывает запаздывание в актах взаимодействия электронов. Оно соответствует функции распространения $U_{eff}(\vec{q}, \omega_n)$. В нулевом приближении она равна $\nu(\vec{q})$. Следующие приближения учитывают поляризацию среды при распространении взаимодействия. Эффективное взаимодействие связано с взаимодействием частиц в вакууме соотношением

$$U_{eff}(\vec{q}, \omega_n) = \nu(\vec{q}) [1 - \nu(\vec{q}) P(\vec{q}, \omega_n)]^{-1}, \tag{6.3}$$

где P – поляризационный оператор [2]. В приближении случайных фаз он равен

$$P(q) = 2 \int dp G_0(p) G_0(p + \hbar q), \quad (6.4)$$

где

$$\int dp = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\beta} \sum_s.$$

В этом приближении ему соответствует петля на рис. 6.1, а $U_{eff}(\vec{q}, \omega_n)$ изображается суммой кольцевых диаграмм с внешними пунктирными линиями. Входящая в (6.4) сумма по нечетным мацубаровским частотам вычисляется с использованием контурного интеграла (см. (3.19)). В результате получаем

$$P(\vec{q}, \omega_n) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{n_{\vec{p}} - n_{\vec{p}-\hbar\vec{q}}}{\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}-\hbar\vec{q}} - i\hbar\omega_n}, \quad (6.5)$$

где $n_{\vec{p}}$ – фермиевская функция распределения.

Суммируя кольцевые диаграммы на рис. 6.1, получаем связь Σ_r с U_{eff} (6.3):

$$\Sigma_r(p) = - \int dq [U_{eff}(q) - \nu(q)] G_0(p - \hbar q). \quad (6.6)$$

Здесь

$$\int dq = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n.$$

В этой формуле слагаемое $\nu(q)$ вычитается потому, что пунктирная линия без электронной петли, входящая в U_{eff} , в Σ_r не входит. Соотношение (6.6) показано на рис. 6.4. На этом

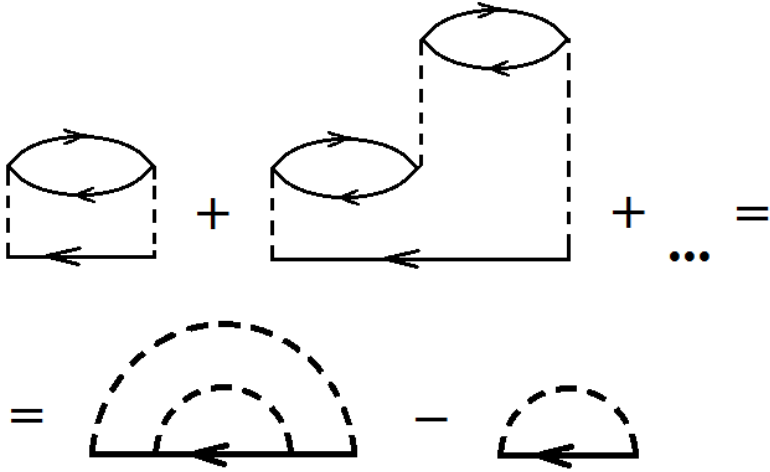


Рис. 6.4. Связь Σ_r (6.6) с U_{eff} .

рисунке двойная штриховая линия соответствует U_{eff} в приближении случайных фаз. Вычисляя $U_{eff} - \nu$ с учетом (6.3), получаем для собственно-энергетической функции в кольцевом приближении выражение

$$\Sigma_r(p) = - \int dq \frac{v^2(q)P(q)}{1 - v(q)P(q)} G_0(p - \hbar q). \quad (6.7)$$

После подстановки этого выражения в формулу (2.24) получаем вклад кольцевых диаграмм в термодинамический потенциал.

Входящее в формулу (2.24) произведение ΣG представим в виде ряда по степеням $e^2 / \hbar v_0$:

$$\Sigma G = \Sigma G_0 + \Sigma G_0 \Sigma G_0 + \dots$$

Учитывая это разложение, получаем вклад кольцевых диаграмм в термодинамический потенциал Ω в виде

$$\begin{aligned} \Omega_r &= V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int dp \Sigma_r^\lambda(p) G_0(p) e^{i\zeta_s 0^+} = \\ &= -V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int dq \frac{[\lambda v(q)]^2 P(q)}{1 - \lambda v(q) P(q)} \int dp G_0(p) G_0(p - \hbar q) e^{i\zeta_s 0^+}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Появление дополнительного множителя $G_0(p)$ под знаком интеграла в (6.8) означает, что вклад кольцевых диаграмм в Ω можно изобразить замкнутыми петлями на рис. 6.5. Эти

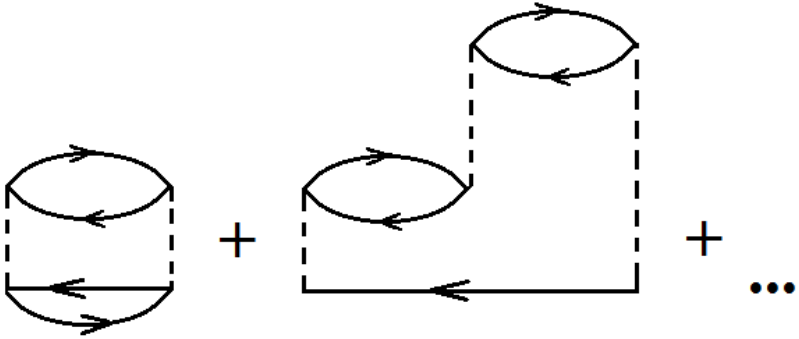


Рис. 6.5. Диаграммы для термодинамического потенциала Ω в кольцевом приближении

диаграммы получаются из диаграмм на рис. 6.2 добавлением электронной линии, соответствующей $G_0(p)$.

Поляризационный оператор (6.4) – четная функция \vec{q} и ω_n . Следовательно,

$$\Omega_r = -\frac{V}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int dq \frac{[\lambda v(q) P(q)]^2}{1 - \lambda v(q) P(q)}.$$

Входящий сюда интеграл по λ равен

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{(\lambda \nu P)^2}{1 - \lambda \nu P} = -\nu P \left[1 + \frac{1}{\nu P} \ln(1 - \nu P) \right].$$

Поэтому

$$\Omega_r = \frac{V}{2} \int dq \{ \nu(q) P(q) + \ln[1 - \nu(q) P(q)] \}. \quad (6.9)$$

Чтобы продвинуться дальше, необходимо вычислить поляризационный оператор P . Поскольку интегрирование в формуле (6.9) при любой температуре можно выполнить лишь численно, ограничимся предельными случаями низких и высоких температур [11].

6.2. Вырожденный электронный газ

При нулевой температуре фермиевская функция распределения электронов в (6.5) становится ступенькой $n_p = \Theta(p_0 - p)$, где $p_0 = (2m\mu)^{1/2}$. Входящая в (6.9) сумма по четным мацубаровским частотам заменяется интегралом. Множитель $\nu(q)$ при $P(q)$ в интеграле (6.9) означает, что при интегрировании по q существенны малые q . Используя разложение числителя и знаменателя в формуле (6.5) по степеням q , получаем

$$P(\vec{q}, \omega) = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{q} \nabla_{\vec{p}} n_{\vec{p}}}{i\omega - \frac{\vec{p}\vec{q}}{m}}. \quad (6.10)$$

Входящий сюда градиент функции распределения при $T = 0$ равен

$$\nabla_{\vec{p}} n_{\vec{p}} = -\frac{\vec{p}}{p} \delta(p - p_0).$$

Интегрирование в (6.10) удобно выполнить в сферических координатах в импульсном пространстве с осью p_z вдоль \vec{q} . Интеграл по углу Θ между векторами \vec{p} и \vec{q} после замены $x = \cos \Theta$ сводится к интегралу

$$R(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{xdx}{x - iz},$$

где $z = \frac{m\omega}{qp_0}$. Тогда при малых q получаем

$$P(\vec{q}, \omega) = -\frac{mk_0}{\pi^2 \hbar^2} R\left(\frac{m\omega}{qp_0}\right), \quad (6.11)$$

где

$$R(z) = 1 - z \operatorname{arctg} \frac{1}{z}. \quad (6.12)$$

В результате вклад кольцевых диаграмм в термодинамический потенциал (6.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega_r(T=0, V, \mu) &= \frac{V \hbar^2 k_0^5}{(2\pi)^3 m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} du u^3 \times \\ &\times \left\{ \ln \left[1 - \frac{4\pi e^2}{k_0^2 u^2} P\left(k_0 u, \frac{\hbar k_0^2 u x}{m}\right) \right] + \frac{4\pi e^2}{k_0^2 u^2} P\left(k_0 u, \frac{\hbar k_0^2 u x}{m}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь $u = \frac{q}{k_0}$, $x = \frac{m\omega}{qp_0}$. Разложение подынтегральной функции в (6.13) по степеням $\alpha = \frac{e^2}{\hbar v_0}$ приводит к расходимости интеграла по переменной u . Поэтому разбиваем интеграл на две части – по интервалу $0 < u < u_0 \ll 1$ и $u_0 < u < \infty$. В области $0 < u < u_0$ используем длинноволновую аппроксимацию (6.11). В интеграле от u_0 до ∞ остается точная

зависимость P от u . Подынтегральная функция в области $u > u_0$ может быть разложена в ряд по степеням α . Ограничиваясь в этом разложении членами порядка α^2 , получаем

$$\Omega_r = \Omega_{r1} + \Omega_{r2},$$

где

$$\Omega_{r1} = \frac{V\hbar^2 k_0^5}{8\pi^3 m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{u_0} du u^3 \times$$

$$\times \left\{ \ln \left[1 + \frac{4m}{\pi\hbar^2 k_0} \left(\frac{e}{u} \right)^2 R(x) \right] - \frac{4m}{\pi\hbar^2 k_0} \left(\frac{e}{u} \right)^2 R(x) \right\}, \quad (6.14)$$

$$\Omega_{r2} = -\frac{V\hbar^2 k_0^5}{16\pi^3 m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{u_0}^{\infty} du u^3 \left[\frac{4\pi e^2}{k_0^2 u^2} P \left(k_0 u, \frac{\hbar k_0^2 u x}{m} \right) \right]^2. \quad (6.15)$$

Интеграл по u в (6.14) после интегрирования по частям равен

$$A = \int_0^{u_0} du u^3 \left\{ \ln \left[1 + \frac{4m}{\pi\hbar^2 k_0} \left(\frac{e}{u} \right)^2 R \right] - \frac{4m}{\pi\hbar^2 k_0} \left(\frac{e}{u} \right)^2 R \right\} =$$

$$= \left(\frac{4me^2}{2\pi\hbar^2 k_0} R \right)^2 \left[\left(\frac{\pi\hbar^2 k_0 u_0^2}{4me^2 R} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{4me^2 R}{\pi\hbar^2 k_0 u_0^2} \right) - \right. \quad (6.16)$$

$$\left. - \frac{4me^2 R}{\pi\hbar^2 k_0 u_0^2} \ln \left(1 + \frac{\pi\hbar^2 k_0 u_0^2}{4me^2 R} \right) \right].$$

Оставляя здесь члены порядка α^2 , находим

$$A = \left(\frac{4me^2}{2\pi\hbar^2 k_0} R \right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{4me^2 R}{\pi\hbar^2 k_0 u_0^2} \right). \quad (6.17)$$

Интеграл по u в (6.15) логарифмически расходится, когда $u_0 \rightarrow 0$, так как функция P стремится в этом случае к постоянному пределу. Выразим этот интеграл через функцию

$$J(x) = \frac{-6}{\pi^3} \lim_{u_0 \rightarrow 0} \left[R^2(x) \ln u_0 + \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{mk_0} \right)^2 \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u} P^2 \left(k_0 u, \frac{\hbar k_0^2 u x}{m} \right) \right]. \quad (6.18)$$

Если подставить сюда (6.11), легко убедиться, что эта функция остается конечной при $u_0 \rightarrow 0$:

$$J(x) = \frac{-6}{\pi^3} \lim_{u_0 \rightarrow 0} \left[R^2 \ln u_0 + R^2 \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u} \right] = \frac{-6}{\pi^2} \lim_{u_0 \rightarrow 0} \left[R^2 \ln u_0 + R^2 \ln u \Big|_{u_0}^{\infty} \right].$$

Слагаемое $R^2 \ln u_0$ сокращается. Что касается верхнего предела в интеграле (6.18), то его сходимость на верхнем пределе имеет место, поскольку $P(q, \omega_n) \sim \omega_n^{-2}$ при $|\omega_n| \rightarrow \infty$. Учитывая (6.17) и (6.18), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_r = \frac{V \hbar^2 k_0^5}{8\pi^3 m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{4me^2 R}{2\pi \hbar^2 k_0} \right)^2 \ln \frac{4me^2 R}{\pi \hbar^2 k_0} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{4me^2 R}{2\pi \hbar^2 k_0} \right)^2 + \frac{\pi}{3} \left(\frac{2me^2}{\hbar^2 k_0} \right)^2 J(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Таким образом, процедура расчета Ω_r свелась к вычислению интеграла по x (6.19), содержащего $R(x)$ и $J(x)$.

Длинноволновая часть термодинамического потенциала (6.19) представляет собой основной вклад кольцевых диаграмм в термодинамические величины вырожденного электронного газа высокой плотности, в частности, в корреляционную энергию. Последняя определяется как разность между точным значением энергии основного состояния и значением,

полученным в приближении Хартри-Фока. Помимо (6.19) она содержит вклад диаграммы на рис. 1.3 (д):

$$E_{corr} = \Omega_r(\varepsilon_0) + \Omega_2(\varepsilon_0), \quad (6.20)$$

где ε_0 – энергия Ферми. Входящий в формулу для Ω химический потенциал необходимо выразить через ε_0 , поскольку корреляционная энергия выражается через фиксированную плотность электронов и ε_0 . Запишем корреляционную энергию (6.20) в виде

$$E_{corr} = \frac{Ne^2}{2a_0} \varepsilon_{corr},$$

где a_0 – боровский радиус, а $\varepsilon_{corr} = \varepsilon_r + \varepsilon_2$ в соответствии с (6.20). Выразим ε_{corr} через безразмерный параметр $r_s(0)$. Оставляя в (6.19) слагаемые порядка $\alpha^2 \ln \alpha$, при $r_s \ll 1$ получаем

$$\varepsilon_r = \frac{3}{\pi^3} \ln r_s \int_{-\infty}^{\infty} dx R^2(x). \quad (6.21)$$

Входящий сюда интеграл вычисляется в [22,23].

Учитывая (6.12), выполним в (6.21) интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\infty} dx \left(1 - x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{3} \left[x - 2(1+x^2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + x^3 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)^2 \right] \Big|_0^{\infty} - \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{1+x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Представим $\operatorname{arctg} x$ в виде

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \int_0^x dz \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix}.$$

Подставим это выражение в B :

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{1+x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x}{1+x^2} [\ln(x+i) - \ln(x-i)].$$

По теореме Коши о вычетах получаем

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{1+x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

В результате

$$B = \frac{\pi}{3} (1 - \ln 2), \quad (6.23)$$

так как значение функции $x^3 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)^2$ на верхнем пределе в (6.22) сокращается. После подстановки (6.23) в (6.21) находим вклад кольцевых диаграмм в корреляционную энергию:

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\pi^2} (1 - \ln 2) \ln r_s. \quad (6.24)$$

Слагаемое ε_2 в корреляционной энергии равно

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{16\pi^5} \int \frac{d^3 q}{q^2} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3 k \int_{|\vec{k}'+\vec{q}|>1} d^3 k' \frac{\Theta(1-k)\Theta(1-k')}{(\vec{q} + \vec{k} + \vec{k}')^2 [q^2 + \vec{q}(\vec{k} + \vec{k}')]}, \quad (6.25)$$

где все волновые числа выражены в единицах фермиевского волнового числа k_0 .

Более точное выражение для ε_{corr} приведено в монографии [11]. Если ввести в (6.19) безразмерный параметр $r_s(0)$, получим

$$\Omega_r = N \frac{e^2}{2a_0} \left\{ \frac{3}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx R^2(x) \left[\ln \left(\frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} r_s \right) + \ln R(x) - \frac{1}{2} \right] + \delta \right\}, \quad (6.26)$$

где

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} dx J(x).$$

Подставляя (6.23) и (6.26) в (6.20), находим

$$\varepsilon_{corr} = \frac{2}{\pi^2} (1 - \ln 2) \left[\ln \left(\frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} r_s \right) + \overline{\ln R(x)} - \frac{1}{2} \right] + \delta + \varepsilon_2, \quad (6.27)$$

где

$$\overline{\ln R} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx R^2 \ln R}{\int_{-\infty}^{\infty} dx R^2}.$$

Величины δ и $\overline{\ln R}$ не зависят от r_s . Они равны [11,34]: $\delta = -0.0508$, $\overline{\ln R} = -0.551$. В свою очередь слагаемое ε_2 (6.25) равно [11,36]:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{3}{2\pi^2} \zeta(3) = 0.048.$$

Здесь $\zeta(3)$ – дзета-функция Римана. Окончательно корреляционная энергия плотного электронного газа принимает вид [11]

$$\varepsilon_{corr} = 0.0622 \ln r_s - 0.094 + O(r_s \ln r_s). \quad (6.28)$$

Теплоемкость вырожденного плотного электронного газа вычислена в работе [35]:

$$\frac{C_V}{C_V^0} = \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} r_s \left[\ln \left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} r_s \right) + 2 \right] \right\}^{-1} = \quad (6.29)$$

$$= [1 + 0.083r_s (-\ln r_s - 0.203)]^{-1},$$

где C_V^0 – теплоемкость идеального ферми-газа [21].

Приведем для справок другие характеристики вырожденного плотного электронного газа. Спектр и затухание квазичастиц вблизи границы Ферми [6]:

$$\varepsilon(p) = \frac{p_0^2}{2m} \left[\frac{p^2}{p_0^2} - 0.166 r_s \frac{p}{p_0} (\ln r_s + 0.203) \right], \quad (6.30)$$

$$\text{Im} \varepsilon(p) = \frac{p_0^2}{2m} \left(0.252 r_s^{1/2} \right) \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)^2;$$

эффективная масса квазичастицы [1]:

$$m_* = m [1 - 0.083r_s (\ln r_s + 0.203)]^{-1}; \quad (6.31)$$

химический потенциал [27]:

$$\mu = \frac{p_0^2}{2m} \left[1 - \frac{2}{\pi} \alpha - 2(1 - \ln 2) \frac{\alpha^2}{\pi^2} \ln \frac{\pi}{\alpha} \right]; \quad (6.32)$$

параметр экранирования Ферми-Томаса [11]:

$$q_{FT}^2 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} r_s k_0^2 = 0.66 r_s k_0^2; \quad (6.33)$$

энергия основного состояния [27,34]:

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5} \frac{p_0^2}{2m} \left[1 - \frac{5}{2\pi} \alpha - \frac{10}{3} (1 - \ln 2) \frac{\alpha^2}{\pi^2} \ln \frac{\pi}{\alpha} \right]; \quad (6.34)$$

скачок функции распределения электронов [27]:

$$f(p_0 - 0) - f(p_0 + 0) = 1 - 0.04 \frac{\alpha}{\pi}; \quad (6.35)$$

давление [8]:

$$P = n \frac{me^4}{2\hbar^2} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} r_s^{-2} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} r_s^{-1} \right]. \quad (6.36)$$

Формулы (6.28)-(6.36) применимы, если средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов $\sim e^2 n^{1/3}$ мала по сравнению со средней кинетической энергией $\sim e^2 n^{2/3} / m$.

6.3. Невырожденный электронный газ

Электронный газ подчиняется статистике Максвелла-Больцмана, если $\exp(\beta\mu) \ll 1$, т. е. $\beta\mu \rightarrow -\infty$. В этом случае функция распределения электронов принимает вид (3.14).

Вклад (6.9) кольцевых диаграмм в термодинамический потенциал Ω в этом случае зависит от поляризационного оператора (6.5). Представим его в другом виде. Для этого в числителе подынтегральной функции (6.5) добавим и вычтем $n_{\vec{p}} n_{\vec{p}-\hbar\vec{q}}$. Сдвигая переменную интегрирования \vec{p} и учитывая четность функции $\varepsilon_{\vec{p}}$, получаем

$$P(\vec{q}, \omega_n) = -4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} n_{\vec{p}} (1 - n_{\vec{p}+\hbar\vec{q}}) \frac{\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}+\hbar\vec{q}}}{(i\hbar\omega_n)^2 - (\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}+\hbar\vec{q}})^2}. \quad (6.37)$$

Отсюда видно, что P – четная функция \vec{q} и ω_n . Если $|\omega_n| \rightarrow \infty$, из формулы (6.37) следует

$$P(\vec{q}, \omega_n) \approx \frac{4}{(\hbar\omega_n)^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} n_{\vec{p}} (1 - n_{\vec{p}+\hbar\vec{q}}) (\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}+\hbar\vec{q}}). \quad (6.38)$$

В формуле (6.9) выделим слагаемое с $n = 0$:

$$\Omega_r = \frac{V}{2\beta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ \ln [1 - \nu(\vec{q}) P(\vec{q}, 0)] + \nu(\vec{q}) P(\vec{q}, 0) \right\} + \frac{V}{\beta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln \left[1 - \nu(\vec{q}) P\left(\vec{q}, \frac{2\pi n}{\hbar\beta}\right) \right] + \nu(\vec{q}) P\left(\vec{q}, \frac{2\pi n}{\hbar\beta}\right) \right\}. \quad (6.39)$$

Если учесть (3.7) и разложить подынтегральное выражение в (6.39) по степеням $\alpha = e^2/\hbar v$ ($v = (m\beta)^{-1/2}$ – тепловая скорость), легко убедиться в том, что слагаемое с $n=0$ в (6.39) расходится при малых q , а слагаемое с $n \neq 0$ остается конечным. Действительно, рассмотрим вклад второго слагаемого в (6.39) от интегрирования по малой окрестности точки $q=0$. Из (6.38) с учетом

$$\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}+\hbar\vec{q}} = -\frac{\vec{p}\hbar\vec{q}}{m} - \varepsilon_{\vec{q}} \quad (\varepsilon_{\vec{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m})$$

следует

$$P(q, \omega_n) = -\frac{2\varepsilon_q}{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2} n_0,$$

где

$$n_0 = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} n_{\vec{p}}$$

– плотность электронов. Входящее в (6.39) выражение $\nu(q) P\left(q, \frac{2\pi n}{\hbar\beta}\right)$ стремится к конечному пределу

$$-\frac{4\pi e^2 \hbar^2 n_0 \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2}{m}$$

при $q \rightarrow 0$. Это позволяет подынтегральную функцию во втором слагаемом (6.39) разложить по степеням α :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln \left[1 - \nu(q) P \left(q, \frac{2\pi n}{\hbar\beta} \right) \right] + \nu(q) P \left(q, \frac{2\pi n}{\hbar\beta} \right) \right\} &\approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2 e^2 \beta^2 n_0}{\pi m} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \end{aligned}$$

Это выражение остается конечным при $q \rightarrow 0$. Поэтому второе слагаемое в (6.39) дает вклад в термодинамический потенциал, пропорциональный α^2 . Основной вклад в Ω_r дает первое слагаемое в (6.39).

Вычислим интеграл в

$$P(q, 0) = 4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{n_{\vec{p}}}{\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}-\hbar\vec{q}}}.$$

Выполняя интегрирование в сферических координатах с осью p_z вдоль \vec{q} , вводя переменную $x = \cos\theta$, где θ – угол между векторами \vec{q} и \vec{p} , получаем

$$P(q, 0) = \frac{2m}{\pi^2 \hbar^5} \int_0^{\infty} dp p^2 n_p \int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{2qpx}{\hbar} - q^2}.$$

Входящий сюда внутренний интеграл равен

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{2qpx}{\hbar} - q^2} = \frac{\hbar}{2qp} \ln \left| \frac{\frac{2p}{\hbar} - q}{\frac{2p}{\hbar} + q} \right|.$$

Оставшийся интеграл

$$P(q, 0) = \frac{m}{(\pi\hbar)^2 \hbar^2 q} e^{\beta\mu} \int_0^\infty dp p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \ln \left| \frac{\frac{2p}{\hbar} - q}{\frac{2p}{\hbar} + q} \right|$$

после замены переменной интегрирования $p = \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{1/2} u$ становится равным

$$P(q, 0) = -2\beta \lambda^{-3} e^{\beta\mu} \varphi(q\lambda), \quad (6.40)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi x} \int_0^\infty du u e^{-\frac{u^2}{4\pi}} \ln \left| \frac{2u+x}{2u-x} \right|, \quad (6.41)$$

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m} \right)^{1/2}$$

– тепловая длина волны де Бройля. Асимптотики функции (6.41) принимают вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \ll 1, \\ 8\pi/x^2, & x \gg 1. \end{cases} \quad (6.42)$$

Подставляя (6.40) в (6.39), находим основной вклад кольцевых диаграмм в термодинамический потенциал:

$$\Omega_r = V (2\pi)^{-3} (2\beta)^{-1} \int d^3q \left\{ \ln \left[1 + 8\pi e^2 \beta \lambda^{-3} e^{\beta\mu} \frac{\varphi(q\lambda)}{q^2} \right] - \right. \\ \left. - 8\pi e^2 \beta \lambda^{-3} e^{\beta\mu} \frac{\varphi(q\lambda)}{q^2} \right\}. \quad (6.43)$$

Вводя новую переменную

$$z = \left(8\pi e^2 \beta \lambda^{-3} e^{\beta\mu} \right)^{-1/2} q,$$

преобразуем выражение (6.43) к виду

$$\begin{aligned} \Omega_r = 2Ve^3 \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} (2\lambda^{-3} e^{\beta\mu})^{3/2} \times \\ \times \int_0^\infty dz z^2 \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{x^2} \varphi \left(2e \left(2\pi\beta\lambda^{-1} e^{\beta\mu} \right)^{1/2} z \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{x^2} \varphi \left(2e \left(2\pi\beta\lambda^{-1} e^{\beta\mu} \right)^{1/2} z \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Поскольку это выражение пропорционально e^3 , при $\alpha \ll 1$ можно в подынтегральной функции в (6.44) положить $\alpha = 0$. Тогда, учитывая (6.42), находим

$$\Omega_r = 2Ve^3 \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} (2\lambda^{-3} e^{\beta\mu})^{3/2} \int_0^\infty dz z^2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) - \frac{1}{z^2} \right].$$

После интегрирования по частям отсюда получаем

$$\Omega_r(V, T, \mu) = -\frac{2}{3} Ve^3 (\pi\beta)^{1/2} (2\lambda^{-3} e^{\beta\mu})^{3/2}. \quad (6.45)$$

Это выражение получено в [21] другим методом. Отметим, что зависимость $\Omega_r \sim e^3$ не может быть получена в рамках теории возмущений разложением по степеням α .

Учитывая (3.15), получаем приближенную формулу для термодинамического потенциала невырожденного электронного газа:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_{exch} + \Omega_r + O(e^4), \quad (6.46)$$

где

$$\Omega_0 = -2V\beta^{-1}\lambda^{-3}e^{\beta\mu} \quad (6.47)$$

– потенциал идеального газа [21]. Он равен

$$\Omega_0 = -P_0V,$$

где $P_0 = n_0/\beta$ – давление. Дифференцируя (6.46) по μ , получаем среднее число электронов в открытой системе:

$$N(V, T, \mu) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{V, T} = 2V \lambda^{-3} e^{\beta \mu} \left[1 + \sqrt{2\pi} \left(\frac{e^2 \beta}{\lambda} \right)^{3/2} e^{\frac{1}{2} \beta \mu} \right]. \quad (6.48)$$

Фиксируя число частиц, находим из (6.48) зависимость химического потенциала газа от температуры и плотности:

$$\mu = \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1}{2} n \lambda^3 \left[1 - \sqrt{\pi} \left(e^2 \beta n^{1/3} \right)^{3/2} \right] \right\}. \quad (6.49)$$

Давление газа равно

$$P = \frac{n}{\beta} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{3} \left(e^2 \beta n^{1/3} \right)^{3/2} \right]. \quad (6.50)$$

Эта формула получена Дебаем и Хюккелем в 1923 году. Формулы (6.45), (6.48)-(6.50) справедливы, если средняя потенциальная энергия взаимодействия частиц $e^2 n^{1/3}$ мала по сравнению с тепловой энергией $1/\beta$. Кроме того, должно выполняться неравенство

$$\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \ll e^2 n^{1/3}.$$

Это условие позволяет использовать классическую статистику и опустить малый вклад Ω_{exch} , поскольку

$$\frac{\Omega_{exch}}{\Omega_r} \sim \left(\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \right) \left(\frac{e^2 n^{1/3}}{\beta} \right)^{-1/2}.$$

Неравенство $e^2 n^{1/3} \ll 1/\beta$ требует, чтобы поправка Дебая-Хюккеля была малой по сравнению с термодинамическим потенциалом идеального газа.

Задачи

6.1. Вычислите корреляционную энергию двумерного электронного газа высокой плотности (см. Zia R.K.P., Journ. Phys. C6, 3121 (1973)).

6.2. Получите корреляционную энергию двумерного электронного газа в магнитном поле (см. Isihara A., Toyoda T., Ann. Phys. 106, 394 (1977); Horing N.J.M., La Bonney J.J., Journ. of Magn. And Magn. Mater. 11, 73 (1979)).

6.3. Найдите температурные поправки к энергии электронного газа высокой плотности (см. Galitski V.M., Das Sarma S., Phys. Rev. B70, 035111 (2004); Ying Zhang and Das Sarma S., Phys. Rev. B70, 035104 (2004)).

6.4. Получите корреляционную энергию электронного газа на поверхности цилиндра.

6.5. Вычислите функцию распределения и статистическую сумму плотного электронного газа. Учтите магнитное поле (см. [37-39]).

6.6. В приближении случайных фаз найдите сжимаемость и магнитную восприимчивость плотного электронного газа (см. Нозьер Ф., Пайнс Д., Теория квантовых жидкостей. – М.: Мир, 1967).

6.7. Вычислите интеграл (6.25) (см. [11] и [36]).

6.8. Покажите, что энергия основного состояния электронного газа высокой плотности равна

$$E_0 = \frac{me^4}{2\hbar^2} N \left[\frac{2.21}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} + 0.0622 \ln r_s - 0.094 + O(r_s \ln r_s) \right].$$

Литература

1. Маттук Р. Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел. – М.: Мир, 1969.
2. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. – М.: Физматгиз, 1962.
3. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч. 2. – М.: Наука, 1978.
4. Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В. Метод функций Грина в статистической механике. – М.: ФМ, 1961.
5. Киржниц Д.А. Полевые методы теории многих частиц. – М.: Госатомиздат, 1963.
6. Пайнс Д. Проблема многих тел. – М.: ИИЛ, 1963.
7. Таулес Д. Квантовая механика систем многих частиц. – М.: ИЛ, 1963.
8. Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1964.
9. Schultz T.D. Quantum Field Theory and the Many-Body Problem. – New York, 1964.
10. Мигдал А.Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. – М.: Наука, 1965.

11. Fetter A.L., Walecka J.D. Quantum Theory of Many-Particle Systems. – New York: Mc Gr.-Hill, 1971.
12. Реймс С. Теория многоэлектронных систем. – М.: Мир, 1976.
13. Economou E.N. Green Functions in Quantum Physics. – Berlin: Springer, 1979.
14. Rickayzen G. Green's Functions and Condensed Matter. – London: Academic Press, 1980.
15. Mahan G.D. Many-Particle Physics. – New York: Plenum Press, 1981.
16. Ермолаев О.М., Рашба Г.И. Вступ до статистичної фізики і термодинаміки. – Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2004.
17. Ермолаев А.М., Рашба Г.И. Лекции по квантовой статистике и кинетике. Ч. 5. Функции Грина в квантовой статистике. – Харьков: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2009.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989.
19. Feynman R. Phys. Rev. 76, 749 (1949).
20. Goldstone J. Proc. Roy. Soc. A 239, 267 (1957).
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М.: Наука, 1995.

22. Левитов Л.С., Шитов А.В. Функции Грина. Задачи с решениями. – М.: Физматлит, 2002.
23. Зайцев Р.О. Введение в современную статистическую физику. – М.: URSS, 2006.
24. Hartree D.R. Proc. Cambr. Phil. Soc. 24, 89, 111 (1928).
25. Fock V.Z. Physik 61, 126 (1930).
26. Галицкий В.М. ЖЭТФ 34, 151 (1958).
27. Галицкий В.М. Одночастичный спектр неидеального ферми-газа. В сб. «Применение методов квантовой теории поля к задачам многих тел», с. 3, под ред. А.И. Алексеева. – М.: Гостехиздат, 1963.
28. Ландау Л.Д. ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
29. Ландау Л.Д. ЖЭТФ 35, 97 (1958).
30. Salpeter E.E., Bethe H.A. Phys. Rev. 84, 1232 (1951).
31. Абрикосов А.А., Халатников И.М. ЖЭТФ 33, 1154 (1957).
32. Lee T.D., Yang C.N. Phys. Rev. 105, 767, 1119 (1957).
33. Мигдал А.Б. ЖЭТФ 32, 399 (1957).
34. Gell-Mann M., Brueckner K.A. Phys. Rev. 106, 364 (1957).
(Имеется перевод в сб. ПСФ 1, 38 (1958).)
35. Gell-Mann M. Phys. Rev. 106, 369 (1957). (Имеется перевод в сб. ПСФ 1, 66 (1958).)

36. Onsager L., Mittag L., and Stephen M.J. Ann. Phys. 18, 71 (1966).
37. Марч Н., Янг У., Сампантхар С. Проблема многих тел в квантовой механике. – М.: Мир, 1969.
38. Кулик И.О. ЖЭТФ 40, 1344 (1961).
39. Du Bois D.F. Ann. Phys. 7, 174 (1959); 8, 24 (1959).

Навчальне видання

Єрмолаєв Олександр Михайлович

Рашба Георгій Ілліч

Взаємодіючі електрони

(Рос. мовою)

Відповідальний за випуск О.І. Любимов

В авторській редакції

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 2.9. Наклад 50 прим.

Видавець і виготовлювач

ФОП «Ляпин А.А.»